Aufgabe 20.35

Berechnen Sie die Länge von

a) $y(x) = 1 - \ln\cos x$ für $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ und von

b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ e^t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2$!

Lösung:

a) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,d\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \left[\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}} \approx 0.88137$$

(Dabei ist die Substitution $t = \tan\dfrac{x}{2}$ ausgeführt:

$$\frac{x}{2} = \arctan t,\quad x = 2\arctan t,\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.)$$

b) $$\int_0^2 \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,dt = \int_0^2 \sqrt{e^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1\right]}\,dt = \sqrt{3}\int_0^2 e^t\,dt = \sqrt{3}(e^2 - 1)$$

$$\approx 11.066$$