Aufgabe 20.34

Berechnen Sie die Bogenlängen folgender Kurven:

a) $x=t,\ y=t^2,\ z=\frac{2}{3}t^3,\quad 0\le t\le 3,$

b) $y=\sqrt{x^3},\quad 0\le x\le \frac{4}{3},$

c) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ \ a>0,\ \ 0\le t\le \frac{\pi}{2}$

(im I. Quadranten gelegener Teil der Astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$) !

Lösung:

a) $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \frac{2}{3}t^3 \end{pmatrix},\quad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^2 \end{pmatrix}$

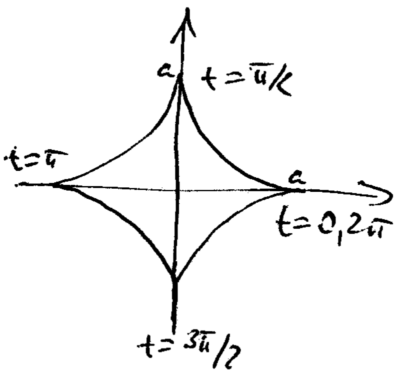
$$L=\int\limits_0^3 \sqrt{1+4t^2+4t^4}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^3 \sqrt{(1+2t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^3 (1+2t^2)\,\mathrm{d}t=t+\frac{2}{3}t^3\Big|_0^3=3+\frac{2}{3}27=\underline{\underline{21}}$$

b) $y(x)=x^{\frac{3}{2}},\quad y'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x},\quad y'^2=\frac{9}{4}x$

$$L=\int\limits_0^{4/3} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{4/3} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \mathrm{d}x=\frac{4}{9}\int\limits_0^{4/3} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \mathrm{d}\left(1+\frac{9}{4}x\right)=\frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{4/3}$$

$$=\frac{8}{27}\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{8}{27}(8-1)=\underline{\underline{\frac{56}{27}\approx 2.074}}\qquad \text{(Substitution } u=1+\frac{9}{4}x \text{ vorgenommen)}$$

c)



$\dot{x}=3a\cos^2 t(-\sin t),\ \ \dot{y}=3a\sin^2 t\cos t$

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}$$

$$=\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}=3a\sin t\cos t$$

(da I. Quadrant)

$$L=\int\limits_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=3a\int\limits_0 \sin t\,\mathrm{d}\sin t=3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}=\underline{\underline{\frac{3}{2}a}}$$

(Substitution $u=\sin t$ vorgenommen)

(Die Gesamtlänge der Astroide beträgt $6a$.)