

Aufgabe 20.33

Sei C der Abschnitt der Spirale $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$. Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) dl$!

Lösung:

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt,$$

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dl &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(a^2 t + \frac{b^2}{3} t^3 \right) \Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\sqrt{a^2 + b^2} \left(2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2 \right)}} \end{aligned}$$