Aufgabe 20.32

Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art von $U(x,y,z)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2+13}$ über dem Geradenstück vom Koordinatenursprung zum Punkt $(3,3,-3)$!

Lösung:

Geradenstück $C=\left\{\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}, 0\le t\le 3\right\}$

$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2+(\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{3}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_C U(\vec{x}(t))\,\mathrm{d}l=\int_0^3\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}t}{(t-1)^2+(t-2)^2+(-t-3)^2+13}=\int_0^3\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}t}{t^2-2t+1+t^2-4t+4+t^2+6t+9+13}$$

$$=\int_0^3\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}t}{3t^2+27}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^3\frac{\mathrm{d}t}{t^2+9}=\frac{3}{\sqrt{3}}\int_0^3\frac{\mathrm{d}\frac{t}{3}}{9\left(\left(\frac{t}{3}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\int_0^3\frac{\mathrm{d}\frac{t}{3}}{\left(\left(\frac{t}{3}\right)^2+1\right)}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^3=\frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan 1=\underline{\underline{\frac{\pi}{12\sqrt{3}}\approx 0.1511}}$$