Aufgabe 20.31

Sei C der Geradenabschnitt von $(0,0)$ nach $(1,2)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral 1. Art $\int\limits_C \sqrt{8x^2+3y^2}\,\mathrm{d}l$!

Lösung:

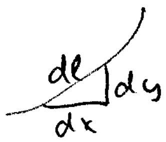
Kurvenintegral 1. Art: wie $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ Integral über einer eindimensionalen Menge,
aber nicht mehr über einem Intervall der x–Achse,
sondern über einer Kurve C in der Ebene oder im Raum

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}l = \lim_{\Delta l\to 0}\sum f(x,y)\,|\Delta l|$$

(Funktionswert mal Länge eines kleinen Kurvenstücks)

Bogenlänge: $L=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\sum|\Delta l|=\int\limits_C \mathrm{d}l$, Masse des Bogens: $m=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\sum\rho(x,y)|\Delta l|=\int\limits_C\rho(x,y)\,\mathrm{d}l$

Kurve C: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, $t_1\le t\le t_2$ oder $y=y(x)$, $x_1\le x\le x_2$



Satz des Pythagoras: $\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,|\mathrm{d}t|=\sqrt{1+y'^2}\,|\mathrm{d}x|$

bzw. falls in Richtung wachsenden Parameters durchlaufen:

$$=\underbrace{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t}_{\text{auf höhere Dim. übertragbar}}=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

Kurvenintegral 2. Art (Integral über die Projektion der Kurve auf die Koordinatenachsen, also über $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$, nicht über $\mathrm{d}l$)

$$\int\limits_C\vec{P}(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\int\limits_C\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\end{pmatrix}=\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

(z.B. Arbeit (skalare Größe) $=$ Kraft $\cdot$ Weg (Skalarprodukt zweier Vektoren),
Skalarprodukt „über kleine Wegstückchen aufaddiert“ $\longrightarrow$ Integral)

Ist C die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, $t_1\le t\le t_2$ so ergibt sich wegen $\mathrm{d}x=\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y=\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t$

$$\int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_{t_1}^{t_2}P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t+Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Merkstoff zu Kurvenintegralen

Geradenabschnitt von $(0,0)$ nach $(1,2)$:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ 0\le t\le 1,\qquad \begin{matrix}x(t)=t, & \dot{x}(t)=1\\ y(t)=2t, & \dot{y}(t)=2\end{matrix}$$

$$\int\limits_C\sqrt{8x^2+3y^2}\,\mathrm{d}l=\int\limits_0^1\sqrt{8t^2+3(2t)^2}\,\sqrt{1^2+2^2}\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\sqrt{20t^2}\,\sqrt{5}\,\mathrm{d}t=\sqrt{100}\int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t=10\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=\underline{\underline{5}}$$