Aufgabe 20.30

Über dem I. Quadranten wird die Variablensubstitution $x=r\cos^2\varphi,\ y=r\sin^2\varphi$ betrachtet.

a) Geben Sie die Vorschrift zur Berechnung von r und φ aus x und y an!

b) Aus welchem Bereich müssen r und φ gewählt werden, um den I. Quadranten einschließlich seiner Ränder vollständig und bis auf den Koordinatenursprung eindeutig zu beschreiben?

c) Geben Sie die Substitutionsformel für Bereichsintegrale für diese Variablensubstitution an!

d) Berechnen Sie mit dieser Formel den Flächeninhalt des von $y=0$, $x+y=1$ und $x=0$ begrenzten Dreiecks!

Lösung:

a) $x+y=r\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r$. Für $x\neq 0$ gilt $\frac{y}{x}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\tan^2\varphi$ und da $\frac{y}{x}$ über dem I. Quadranten nicht negativ werden kann $\sqrt{\frac{y}{x}}=\tan\varphi$.

Somit ergibt sich $r=x+y,\quad \varphi=\arctan\sqrt{\dfrac{y}{x}},\ x\neq 0,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2},\ x=0.$

b) $r\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$. Der Koordinatenursprung ergibt sich dabei für $r=0$ und beliebiges φ.

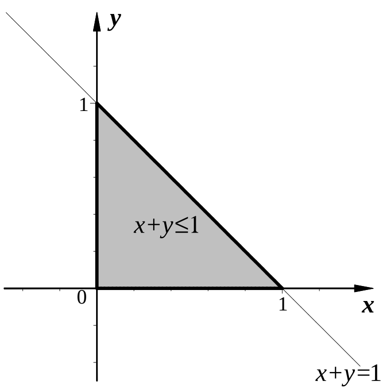
Selbstverständlich kann φ auch aus jedem anderem Intervall $\left[\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right]$ entnommen werden.

c)
$$\begin{aligned} x_r &= \cos^2\varphi, & x_\varphi &= -2r\cos\varphi\sin\varphi \\ y_r &= \sin^2\varphi, & y_\varphi &= 2r\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi\end{vmatrix}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \begin{aligned} &=|2r\sin\varphi\cos^3\varphi+2r\sin^3\varphi\cos\varphi|\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &=2r\sin\varphi\cos\varphi(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=2r\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_G f(x(r,\varphi),y(r,\varphi))\,r\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

d)



$$x+y\leq 1 \iff r\leq 1,$$

$$F=\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 2r\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1 2r\,\mathrm{d}r=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\sin\varphi\int\limits_0^1 2r\,\mathrm{d}r$$

$$=\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}\quad\text{wie ohnehin bekannt}$$