Aufgabe 20.29

Berechnen Sie den Inhalt der von $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1\ (a>0,\ b>0)$, $x=0$ und $y=0$ begrenzten Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals und der Substitution $x=ar\cos^8\varphi,\ y=br\sin^8\varphi$!

Lösung:

$x=ar\cos^8\varphi, \quad y=br\sin^8\varphi$

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=\sqrt[4]{r\cos^8\varphi}+\sqrt[4]{r\sin^8\varphi}=\sqrt[4]{r}\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=\sqrt[4]{r}=1 \text{ für } r=1$$

Der „Eckpunkt“ $x=a$, $y=0$ ergibt sich für $r=1$, $\varphi=0$, der „Eckpunkt“ $x=0$, $y=b$ für $r=1$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Folglich wird die Fläche durch $\left\{x=ar\cos^8\varphi,\ y=br\sin^8\varphi \text{ mit } 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}$ beschrieben, vgl. die Überlegungen zur Astroide in Aufgabe 20.28.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\begin{vmatrix} a\cos^8\varphi & -8ar\cos^7\varphi\sin\varphi \\ b\sin^8\varphi & 8br\sin^7\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &=8abr(\cos^9\varphi\sin^7\varphi+\cos^7\varphi\sin^9\varphi)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

$$F=\iint\limits_B \mathrm{d}b=8ab\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos^7\varphi\sin^7\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=8ab\int_0^{\pi/2}\cos^7\varphi\sin^7\varphi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^7\varphi\sin^7\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned}\int\cos^7\varphi\sin^7\varphi\,\mathrm{d}\varphi&=\int\left(1-\sin^2\varphi\right)^3\sin^7\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\int\left(\sin^7\varphi-3\sin^9\varphi+3\sin^{11}\varphi-\sin^{13}\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{1}{8}\sin^8\varphi-\frac{3}{10}\sin^{10}\varphi+\frac{1}{4}\sin^{12}\varphi-\frac{1}{14}\sin^{14}\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F&=4ab\left(\frac{1}{8}\sin^8\varphi-\frac{3}{10}\sin^{10}\varphi+\frac{1}{4}\sin^{12}\varphi-\frac{1}{14}\sin^{14}\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\\ &=ab\left(\frac{1}{2}-\frac{6}{5}+1-\frac{2}{7}\right)=\frac{ab}{70}(35-84+70-20)=\underline{\underline{\frac{ab}{70}}}\end{aligned}$$