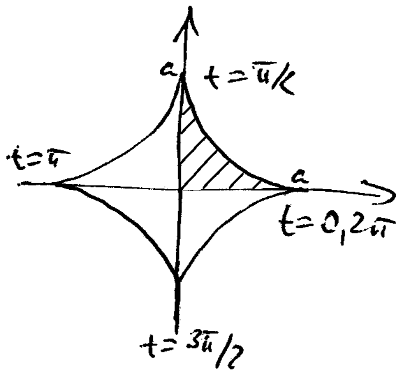
Aufgabe 20.28

Sei $a > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des im I. Quadranten gelegenen Teils der von der Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ eingeschlossenen Fläche mit Hilfe eines Doppelintegrals und der Substitution $x = r\cos^3\varphi,\ \ y = r\sin^3\varphi$!

Hinweis: Die Stammfunktion von $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ kann besseren Formelsammlungen entnommen werden. Alternativ ist eine Rückführung auf Grundintegrale unter Verwendung der Formeln $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ möglich!

Lösung:



vgl. Aufg. 18.55a): Nutzung von $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}\left(\cos^3\varphi\right)^{\frac{2}{3}} + r^{\frac{2}{3}}\left(\sin^3\varphi\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= r^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi + r^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi = r^{\frac{2}{3}}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^{\frac{2}{3}}$$

Auf dem Rand gilt wegen $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, dass $r = a$ ist, im Koordinatenursprung ist $r = 0$. Also muss $0 \le r \le a$ sein, außerdem $0 \le \varphi \le \pi/2$, da nur der I. Quadrant berücksichtigt wird.

$$A = \iint\limits_B \mathrm{d}b = \iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \left|\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos^3\varphi & 3r\cos^2\varphi\,(-\sin\varphi) \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\,\cos\varphi \end{vmatrix}\right| = 3r\cos^4\varphi\,\sin^2\varphi + 3r\sin^4\varphi\,\cos^2\varphi$$
$$= 3r\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 3r\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi$$

$$A = \iint\limits_B \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_0^a 3r\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\int_0^a 3r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\left[\frac{3r^2}{2}\right]_0^a \mathrm{d}\varphi = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Das Integral $\int\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ findet man in besseren Formelsammlungen, z.B. in Bronstein/Semendjajew/Musiol/Mühlig: Taschenbuch der Mathematik. Deutsch, 7. Aufl. 2008, S. 1096, Nr. 355 in der Form $\int\sin^2 ax\cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}$.

Hat man keine Formelsammlung zur Verfügung, so kann man den Integranden mit Hilfe der gegebenen Formeln vereinfachen: $\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2 2\varphi}{4}$. Hier wäre dann mit zweifacher partieller Integration ie Stammfunktion bestimmbar oder man nutzt die 2. gegebene Formel in der Form $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, so dass man schließlich $\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \frac{1-\cos 4\varphi}{8}$ erhält.

$$A = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3a^2}{16}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3a^2}{16}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2}{16}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - (0-0)\right)$$
$$= \underline{\underline{3\pi a^2/32}}$$

Aus Symmetriegründen beträgt die Gesamtfläche innerhalb der Astroide $3\pi a^2/8$. Das kann man auch im Bronstein nachlesen, jetzt im Kapitel 2.13.4, S. 104.