Aufgabe 20.27

Durch die Gleichung $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2-y^2$ wird in kartesischen Koordinaten eine „Lemniskate“ beschrieben.

a) Stellen Sie die Lemniskate durch eine Funktion $r=r(\varphi)$ in Polarkoordinaten dar!
Hinweis: $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

b) Skizzieren Sie die Lemniskate!

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Lemniskate eingeschlossenen Fläche!

Lösung:

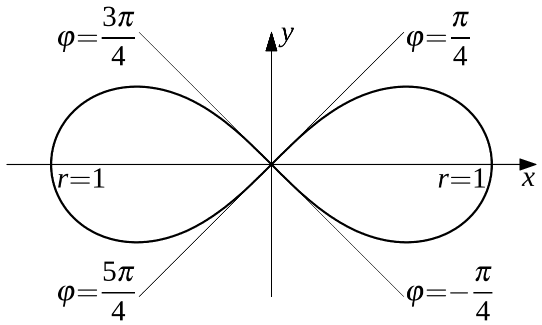
a) Das Einsetzen von $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ in die Gleichung $\left(x^2+y^2\right)^2 = x^2-y^2$ ergibt $r^4 = r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = r^2\cos 2\varphi$. Daraus folgt $r=0$ oder $r^2=\cos 2\varphi$. $r=0$ ist der Koordinatenursprung, dieser ergibt sich auch in $r^2=\cos 2\varphi$ z.B. für $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Also kann man sich auf den Fall $r^2=\cos 2\varphi$ beschränken.

Wegen $r^2=\cos 2\varphi$ ist $\cos 2\varphi \geq 0$, dies ist (bis auf periodische Wiederholung) äquivalent zu $-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{5\pi}{4}$. Nur diese Winkel kommen in Frage, für diese gilt dann aber auch $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Also ist $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}\leq\varphi\leq\dfrac{5\pi}{4}$ die Darstellung der Lemniskate in Polarkoordinaten.

b) $r(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0, \qquad r(0)=\sqrt{\cos 0}=1, \qquad r(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0,$

$r(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 0, \qquad r(0)=\sqrt{\cos 2\pi}=1, \qquad r(\frac{5\pi}{4}) = \sqrt{\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)} = 0$



c) $A = \iint\limits_B \mathrm{d}b = \iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

Aus Symmetriegründen berechnen wir nur den Inhalt des rechten Bogens der Lemniskate, die von diesem umschlossene Fläche sei mit B_1 bezeichnet.

$$\frac{A}{2} = \iint\limits_{B_1} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{4}(1-(-1)) = \frac{1}{2}$$

Also hat die von der Lemniskate umschlossene Fläche den Inhalt 1.