Aufgabe 20.26

Sei V der von $x^2+y^2+z^2=z$ begrenzte Körper.

a) Skizzieren Sie den Körper!

b) Geben Sie die Gleichung der Oberfläche des Körpers in Kugelkoordinaten an!

Hinweis: Die Kugelkoordinaten sind wie üblich auf den Koordinatenursprung des gegebenen kartesischen Koordinatensystems zu beziehen.

c) Beschreiben Sie den Körper in Kugelkoordinaten!

d) Berechnen Sie $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$!

Lösung:

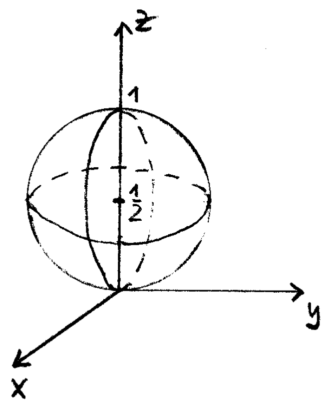
a) $x^2+y^2+z^2=z \iff x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$: Kugel mit Radius $\frac{1}{2}$ um $(0,0,\frac{1}{2})$

b) $x=r\cos\varphi\sin\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\theta$

$x^2+y^2+z^2=z \iff r^2=r\cos\theta$

Für die Punkte auf der Oberfläche der Kugel gilt also

$\underline{\underline{r=\cos\theta}}$.



c) In der Kugelkoordinatendarstellung ist θ der Winkel, den die Strecke vom Koordinatenursprung zu dem Punkt (r,φ,θ) mit der positiven z–Achse einschließt. Somit gilt $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ (Sonst wäre auch $z<0$.).

Da die Punkte $(\cos\theta,\varphi,\theta)$ auf der Kugeloberfläche liegen, liegen alle Punkte (r,φ,θ) mit $0\le r\le\cos\theta$ in der Kugel. Somit gilt

$$V=\left\{(r,\varphi,\theta):\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le r\le\cos\theta\right\}.$$

d) $$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_V r\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta} r^3\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\cos\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=$$

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\cos\theta=-\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{10}}}$$