

Aufgabe 20.24

Berechnen Sie die Masse der mit Material der Dichte $\rho(x, y, z) = 30 - x^2 - y^2 - z^2$ belegten Kugel (Körper) mit Radius 5 um den Koordinatenursprung!

Lösung:

Kugel in Kugelkoordinaten:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad 0 \leq r \leq 5, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad dx dy dz = r^2 \sin \theta \, dr d\varphi d\theta$$

$$\begin{aligned} m &= \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^5 (30 - r^2) r^2 \sin \theta \, dr d\varphi d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 (30r^2 - r^4) \, dr \\ &= \left[-\cos \theta \right]_0^\pi \cdot 2\pi \cdot \left[10r^3 - \frac{r^5}{5} \right]_0^5 = (1 - (-1)) \cdot 2\pi \cdot (10 \cdot 5^3 - 5^4) = 4\pi \cdot 5^4 = \underline{\underline{2500\pi}} \end{aligned}$$