

Aufgabe 20.23

Die obere (d.h. oberhalb der x - y -Ebene gelegene) Halbkugel (Körper) mit Radius 2 um den Koordinatenursprung sei mit Masse der Dichte $\rho(x, y, z) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ belegt. Ermitteln Sie ihre Masse!

Lösung:

Halbkugel in Kugelkoordinaten: $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$,
 $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (damit obere Halbkugel), $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$

$$\begin{aligned} m &= \iiint_K \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3-r) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (3r^2 - r^3) dr \\ &= \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi \cdot \left[r^3 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = (0 - (-1)) \cdot 2\pi \cdot \left(8 - \frac{16}{4} \right) = 2\pi(8 - 4) = \underline{\underline{8\pi}} \end{aligned}$$