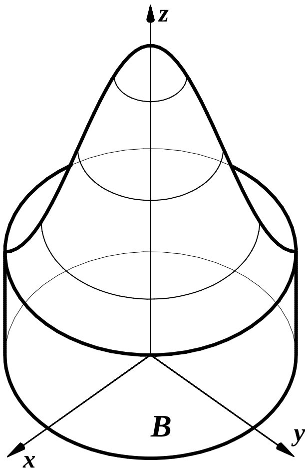
Aufgabe 20.22

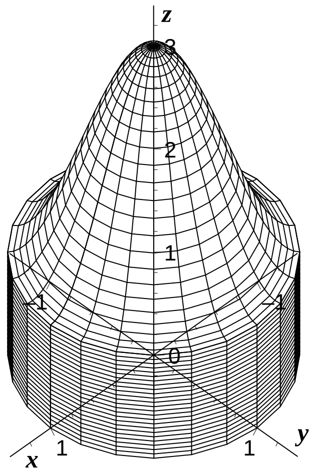
Der von den Flächen $z=0$, $x^2+y^2=1$ und $z=2+\cos\pi\sqrt{x^2+y^2}$ begrenzte Körper bestehe aus Material der Dichte $\rho(x,y,z)=\begin{cases}2-z, & 0\le z\le 1\\ 1, & 1<z\le 2+\cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$.

Skizzieren Sie den Körper und berechnen Sie sein Volumen und seine Masse!

Lösung:

Bei den Begrenzungsflächen handelt es sich um die x–y–Ebene, den unendlichen Kreiszylinder, der die x–y–Ebene im Einheitskreis schneidet, und eine Fläche oberhalb der x–y–Ebene.





Grundfläche B ist deshalb der Einheitskreis in der x–y–Ebene, es bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten r,φ,z mit $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ an.

Die Deckfläche wird durch $z=2+\cos\pi r$ beschrieben, entsteht also durch Rotation von $2+\cos\pi r$, $0\le r\le 1$ um die z–Achse.

$$V=\iint\limits_B 2+\cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2+\cos\pi r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2r+r\cos\pi r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[r^2+\frac{1}{\pi}r\sin\pi r+\frac{1}{\pi^2}\cos\pi r\right]_0^1\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}\right)\mathrm{d}\varphi=2\pi\left(1-\frac{2}{\pi^2}\right)=\underline{\underline{2\pi-\frac{4}{\pi}}}\approx 5.01$$

$$\left(\int r\cos\pi r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi}r\sin\pi r-\frac{1}{\pi}\int\sin\pi r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi}r\cos\pi r+\frac{1}{\pi^2}\cos\pi r\right)$$

oder

$$V=\iiint\limits_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_K r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{2+\cos\pi r}\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^1[z]_0^{2+\cos\pi r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2+\cos\pi r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\cdots=\underline{\underline{2\pi-\frac{4}{\pi}\approx 5.01}}$$

$$m=\iiint\limits_K\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_K\rho(r,\varphi,z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1(2-z)\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{2+\cos\pi r}\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left[2z-\frac{z^2}{2}\right]_0^1 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi+\int_0^{2\pi}\int_0^1[z]_1^{2+\cos\pi r}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(2-\frac{1}{2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+\cos\pi r)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{3}{2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r\cos\pi r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4}r^2\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{1}{\pi} r\sin\pi r + \frac{1}{\pi^2}\cos\pi r\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = 2\pi\frac{3}{4} + 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \pi - \frac{4}{\pi}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \approx 6.58}}$$