Aufgabe 20.21

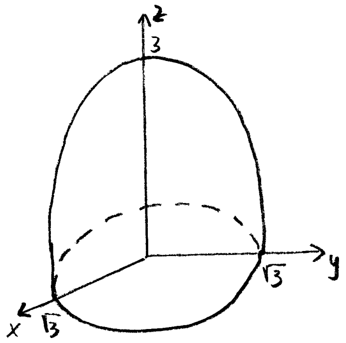
Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt des gleichmäßig mit Masse der Dichte 1 belegten Körpers, der von dem Paraboloid $z = 3 - x^2 - y^2$ und der Ebene $z = 0$ begrenzt wird!

Hinweis: Der Schwerpunkt des Körpers K ist $\left(\frac{\iiint_K x\rho\,\mathrm{d}V}{m}, \frac{\iiint_K y\rho\,\mathrm{d}V}{m}, \frac{\iiint_K z\rho\,\mathrm{d}V}{m} \right)$.

Für die Integration ist ein Übergang zu Zylinderkoordinaten zweckmäßig.

Lösung:

Zylinderkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$



Das Rotationsparaboloid $z = 3 - x^2 - y^2$ schneidet die Ebene $z = 0$ im Kreis $x^2 + y^2 = \sqrt{3}$, d.h. im Kreis mit Radius 3 um den Koordinatenursprung. Die Grundfläche des Körpers K wird also beschrieben durch $\left\{(r,\varphi):\ 0 \le r \le \sqrt{3}, 0 \le \varphi < 2\pi\right\}$. Auf der Deckfläche gilt $z = 3 - x^2 - y^2 = 3 - r^2$. Der Körper K wird demnach beschrieben durch $\left\{(r,\varphi,z) : 0 \le r \le \sqrt{3}, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z \le \sqrt{3}\right\}$.

$$m = \iiint_K \rho\,\mathrm{d}V = \iiint_K r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{3}} r\,\mathrm{d}r \int_0^{3-r^2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r(3-r^2)\,\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3r - r^3)\,\mathrm{d}r = 2\pi \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{9\pi}{2}}}$$

Aus Symmetriegründen gilt $x_S = y_S = 0$.

$$\iiint_K z\rho\,\mathrm{d}V = \iiint_K zr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{3}} r\,\mathrm{d}r \int_0^{3-r^2} z\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r\frac{(3-r^2)^2}{2}\,\mathrm{d}r$$
$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (9r - 6r^3 + r^5)\,\mathrm{d}r = \pi \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{3r^4}{2} + \frac{r^6}{6} \right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \pi \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{2} + \frac{27}{6} \right) = \frac{9\pi}{2}$$

Somit ist $z_S = \dfrac{\iiint_K z\rho\,\mathrm{d}V}{m} = \dfrac{\frac{9\pi}{2}}{\frac{9\pi}{2}} = 1$, der Schwerpunkt ist $\underline{\underline{(x_S, y_S, z_S) = (0,0,1)}}$.