Aufgabe 20.20

Ein Rotationskörper wird vom Paraboloid $z=24-x^2-y^2$ und vom Kegel $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ begrenzt.

a) In welcher Höhe gegenüber der x-y-Ebene hat der Körper seinen maximalen Durchmesser, wie groß ist dieser Durchmesser?
b) Skizzieren Sie den Körper!
c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers!

Lösung:

a) Das Paraboloid und der Kegel schneiden sich für $z=24-x^2-y^2=2\sqrt{x^2+y^2}$.

Mit $r=\sqrt{x^2+y^2}$ erhält man $24-r^2=2r$ und damit $r^2+2r-24=0,\ r_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+24}=-6;4$.

Als Lösung kommt nur $r=4$ in Frage, somit ist der Durchmesser 8 und die Höhe $24-4^2=2\cdot 4$, also ebenfalls 8.

c) $V=\iiint\limits_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_K r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4\int\limits_{2r}^{24-r^2}\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 [z]_{2r}^{24-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 (24-r^2-2r)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 (24r-r^3-2r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left[12r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{2}{3}r^3\right]_0^4\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(192-64-\frac{2}{3}64\right)\mathrm{d}\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\frac{3\cdot 192-5\cdot 64}{3}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\frac{256}{3}=\underline{\underline{\frac{512}{3}\pi\approx 536.17}}$$

b)