Aufgabe 20.18

Bekanntlich hat die Einheitskugel das Volumen $\frac{4}{3}\pi$. Verifizieren Sie dies mit Hilfe eines Doppelintegrals!

Lösung:

Polarkoordinaten $r^2 = x^2 + y^2,\ \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

Die halbe Einheitskugel ist ein Körper der Höhe $z = \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}$ über dem Einheitskreis.

$$\frac{V}{2} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}(1-r^2)\ \mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{3}(0-1)\,2\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

(Dabei ist die Substitution $t = 1-r^2,\ \ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -2r,\ \ r\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\mathrm{d}t$ benutzt worden, ohne die Variable t zu notieren.)

$$\underline{\underline{V = \frac{4\pi}{3}}}$$