

Aufgabe 20.15

Die obere (d.h. oberhalb der x -Achse gelegene) Halbkreisfläche mit Radius 4 um den Koordinatenursprung sei mit Masse der Dichte $\rho(x,y) = 40 - x^2 - y^2 - 3y$ belegt. Ermitteln Sie seine Masse!

Lösung:

In Polarkoordinaten: $B = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$
 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi$

$$\begin{aligned} m &= \iint_B \rho(x,y) dx dy = \iint_B (40 - (x^2 + y^2) - 3y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^4 (40 - r^2 - 3r \sin \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^4 (40r - r^3 - 3r^2 \sin \varphi) dr d\varphi = \int_0^\pi \left[20r^2 - \frac{r^4}{4} - r^3 \sin \varphi \right]_0^4 d\varphi = \int_0^\pi (320 - 64 - 64 \sin \varphi) d\varphi \\ &= 256\varphi + 64 \cos \varphi \Big|_0^\pi = 256\pi - 64 - 64 = \underline{\underline{256\pi - 128 \approx 676.25}} \end{aligned}$$