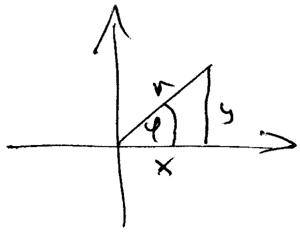
Aufgabe 20.14

Integrieren Sie die Funktion $\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ über dem Einheitskreis, indem Sie zunächst die kartesischen durch Polarkoordinaten substituieren!

Lösung:

Polarkoordinaten $\quad x = r\cos\varphi$
$\qquad\qquad\qquad\quad y = r\sin\varphi$



Einheitskreis: $B = \{(r,\varphi):\ 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi<2\pi\}$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Determinante der Jacobimatrix (Matrix der 1. partiellen Ableitungen)

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \left|\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}\right| = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r, \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\iint\limits_B \sqrt{1-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\;r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\;\mathrm{d}(1-r^2)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\Big[(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(-1)\,\mathrm{d}\varphi = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\left(\mathrm{d}(1-r^2) = -2r\,\mathrm{d}r,\ \ r\,\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\mathrm{d}(1-r^2),\ \text{ d.h. Substitution } t=1-r^2 \text{ vorgenommen.}\right)$$