

### Aufgabe 20.12

Ermitteln Sie die Masse des mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z) = x + y + z$  versehenen Einheitswürfels  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$  !

**Lösung:**

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (\text{Dichte mal Volumen}), \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 (x+y+z) \, dx \right) dy \right) dz = \int_0^1 \left( \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + yx + zx \right]_{x=0}^{x=1} dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + y + z \right) dy \right) dz = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2} + zy \right]_{y=0}^{y=1} dz = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + z \right) dz = \int_0^1 (z+1) \, dz \\ &= \left. \frac{z^2}{2} + z \right|_0^1 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$