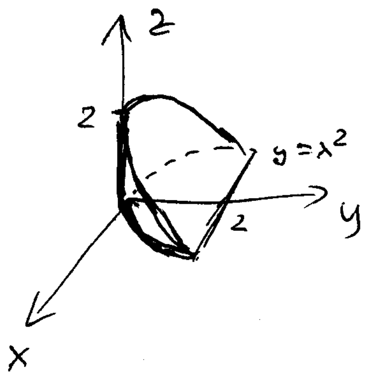
Aufgabe 20.11

Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $z=0$ und $y+z=2$ sowie vom parabolischen Zylinder $y=x^2$ begrenzt wird!

Lösung:



Berechnung wäre auch mit Dreifachintegral möglich:
$V=\iiint\limits_V \mathrm{d}V$.

Schnitt der Ebenen $y+z=2$ und $z=0$ für $z=0, y=2$.
Für $z>0$ wird $y<2$.

Grundfläche in der x–y–Ebene:
$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 2,\ -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\right\}$

Höhe $z=2-y$

$$V=\iint\limits_B (2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^2(2-y)\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^2(2-y)\,2\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int\limits_0^2\left(4y^{\frac12}-2y^{\frac32}\right)\mathrm{d}y=\frac83 y^{\frac32}-\frac45 y^{\frac52}\Big|_0^2=\frac83 2\sqrt2-\frac45 4\sqrt2$$

$$=\sqrt2\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{5}\right)=\underline{\underline{\frac{32\sqrt2}{15}}}\approx 3.02$$