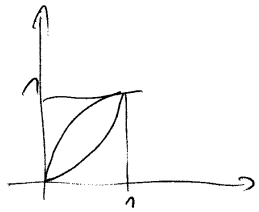
Aufgabe 20.8

Berechnen Sie $\iint\limits_B \frac{x}{y}\,\mathrm{d}B$, wobei das Gebiet B durch $y=x^2$ und $x=y^2$ begrenzt sei!

Lösung:



Die Kurven schneiden sich bei $y=x^2=(y^2)^2=y^4$, also für $y=0$ und 1, d.h. in den Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$.

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[x\ln y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}\ln x - 2\ln x\right)\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_0^1$$

$$= -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

oder

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2y}\right]_{y^2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^4}{2y}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{y}{2} - \frac{y^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$