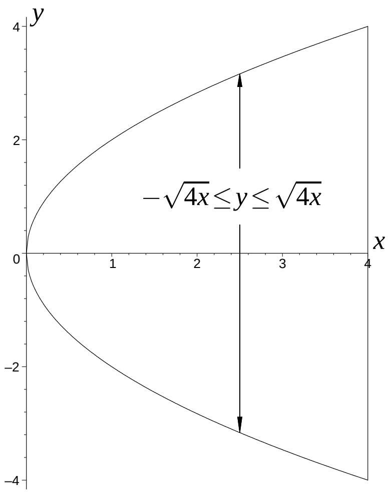
Aufgabe 20.7

Integrieren Sie $f(x,y) = x + y^2$ über dem Gebiet,

a) das von der Parabel $4x = y^2$ und von der Gerade $x = 4$ begrenzt wird!
b) das von der Parabel $4x = y^2$ und von der Gerade $y = 2x - 12$ begrenzt wird!

Lösung:

a)



$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4x}}^{\sqrt{4x}} (x+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^4 xy + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^4 (2x\sqrt{x} + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \frac{8}{3}x\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^4 \frac{28}{3}x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{56}{15}x^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{56}{15}2^5 = \frac{1792}{15} \approx 119.46$$

b) Die Parabel und die Gerade schneiden sich für $x = \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{y+12}{2}$, d.h.
für $(x,y) = (4,-4)$ und $(9,6)$.

$$\int_{-4}^{6} \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+12}{2}} (x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-4}^{6} \left[\frac{x^2}{2} + xy^2\right]_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+12}{2}} \mathrm{d}y = \frac{1}{32}\int_{-4}^{6} (-9y^4 + 16y^3 + 196y^2 + 96y + 576)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{32}\left[(-\frac{9}{5}y^5 + 4y^4 + \frac{196}{3}y^3 + 48y^2 + 576y)\right]_{-4}^{6}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{52416}{5} - \left(-\frac{42752}{15}\right)\right) = \frac{200000}{15\cdot 32} = \frac{1250}{3}$$