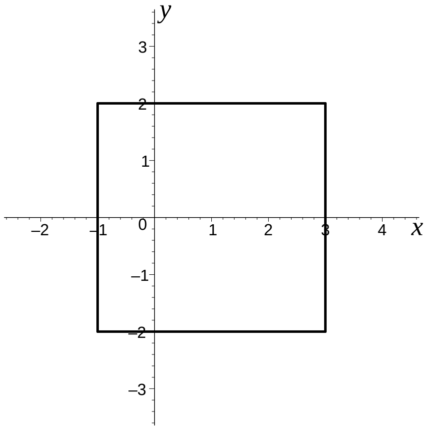
Aufgabe 20.6

Integrieren Sie $f(x,y) = xy^2$

a) über dem Rechteck mit den Eckpunkten $(-1,-2)$, $(3,-2)$, $(3,2)$ und $(-1,2)$,
b) über der von der Parabel $y = x^2$, der Gerade $x = 2$ und der x-Achse begrenzten Fläche sowie
c) über der von der Parabel $x = y^2$, der Gerade $y = 2$ und der y-Achse begrenzten Fläche!

Lösung:

a)

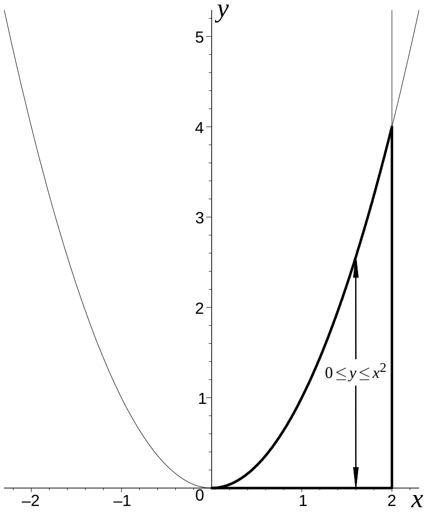


$$B = \{(x,y): -1 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 2\},$$

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-1}^{3} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_{-1}^{3}\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)y^2\,\mathrm{d}y$$

$$= 4\int\limits_{-2}^{2} y^2\mathrm{d}y = \frac{4}{3}y^3\Big|_{-2}^{3} = \frac{4}{3}16 = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

b)

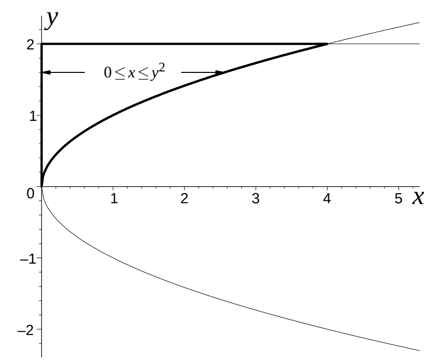


$$B = \{(x,y): 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\},$$

$$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{x^2} xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2}\left[x\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{x^2}\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{2}\frac{x^7}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^8}{24}\Big|_{0}^{2} = \frac{256}{24} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

c)



$$B = \{(x,y): 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le y^2\},$$

$$\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{y^2} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y^2\right]_{0}^{y^2}\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{2}\frac{y^6}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{y^7}{14}\Big|_{0}^{2} = \frac{128}{14} = \underline{\underline{\frac{64}{7}}}$$