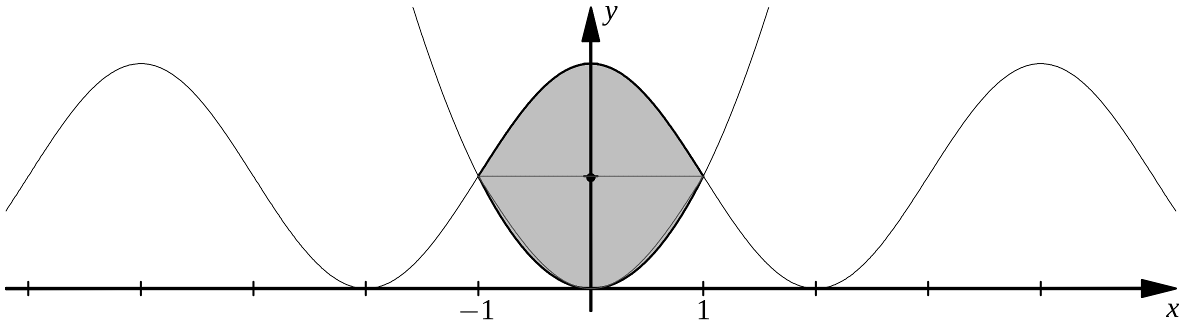
Aufgabe 20.5

Berechnen Sie den Inhalt und den Schwerpunkt der von $y=x^2$ und $y=1+\cos\frac{\pi}{2}x$ begrenzten Fläche!

Hinweis: Zur Ausführung der Integration ist die Formel $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \implies \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ nützlich.

Lösung:



$$B=\left\{(x,y):\ -1\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1+\cos\frac{\pi}{2}x\right\}$$

$$F=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+\cos\frac{\pi}{2}x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\Big[y\Big]_{x^2}^{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x-x^2\right)=x+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\left(1+\frac{2}{\pi}-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{4}{\pi}\approx 2.607$$

$$M_{x,1}=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1+\cos\frac{\pi}{2}x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)^2-x^4\right)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1+2\cos\frac{\pi}{2}x+\cos^2\frac{\pi}{2}x-x^4\right)\,\mathrm{d}x$$

Die Stammfunktion von $\cos^2\frac{\pi}{2}x$ kann Formelsammlungen entnommen oder durch zweifache partielle Integration bestimmt werden bzw. es kann die im Hinweis angegebene Formel verwendet werden:

$$M_{x,1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1+2\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1+\cos\pi x}{2}-x^4\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x+\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2\pi}\sin\pi x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)-\left(-1-\frac{4}{\pi}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{13}{10}+\frac{4}{\pi}$$

$$y_S=\frac{M_{x,1}}{F}=\frac{\frac{13}{10}+\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{3}+\frac{4}{\pi}}\approx 0.987$$

Aus Symmetriegründen gilt offensichtlich $x_S=0$. Also ist der Flächeninhalt 2.607 und der Schwerpunkt liegt in $(0,0.987)$. Letzteres ist plausibel. Durch Spiegelung an $y=1$ wird nämlich deutlich, dass der obere Teil der Fläche geringfügig kleiner ist als der untere.