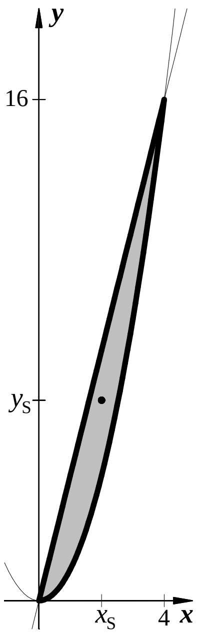
Aufgabe 20.4

Ermitteln Sie den Schwerpunkt der gleichmäßig mit Masse belegten Fläche, die von der Parabel $y=x^2$ und der Gerade $y=4x$ begrenzt wird!

Lösung:

Schwerpunkt: $$(x_S,y_S)=\left(\frac{M_{y,1}}{m},\frac{M_{x,1}}{m}\right)=\left(\frac{\iint\limits_B x\rho(x,y)\,\mathrm{d}b}{\iint\limits_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}b},\frac{\iint\limits_B y\rho(x,y)\,\mathrm{d}b}{\iint\limits_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}b}\right)$$

(x–Komponente betrifft Abstand von der y–Achse usw.!)



$$x^2=4x \implies x=0 \text{ oder } x=4$$

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 4,\ x^2\le y\le 4x\right\}$$

hier: $\rho=\text{const.}$, $$(x_S,y_S)=\left(\frac{\iint\limits_B x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},\frac{\iint\limits_B y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\right)$$

$$\iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^4\left(\int_{x^2}^{4x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^4(4x-x^2)\,\mathrm{d}x=2x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}$$ (Flächeninhalt)

$$\iint\limits_B x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^4 x\left(\int_{x^2}^{4x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^4 x(4x-x^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^4(4x^2-x^3)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\Big|_0^4=\frac{256}{3}-64=\frac{64}{3}$$

$$\iint\limits_B y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^4\left(\int_{x^2}^{4x}y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^4\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4x}\mathrm{d}x=\int_0^4\left(8x^2-\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{3}x^3-\frac{x^5}{10}\Big|_0^4=\frac{512}{3}-\frac{1024}{10}=\frac{5120-3072}{30}=\frac{2048}{30}=\frac{1024}{15}$$

$$x_S=\frac{64/3}{32/3}=2,\quad y_S=\frac{1024/15}{32/3}=\frac{32}{5}=6.4,\qquad \underline{\underline{(x_S,y_S)=(2,6.4)}}$$