Aufgabe 20.3

Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt der mit Masse der Dichte 2 belegten Fläche, die von $y=\sqrt{x}$, $y=0$ und $x+y=2$ begrenzt wird!

Lösung:

mit Masse belegte Fläche: z.B. bezüglich x–Achse

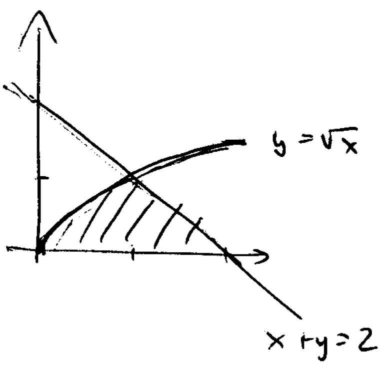
Masse = Dichte × Fläche: $m=\iint\limits_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}b$

1. (statisches) Moment = Abstand × Dichte × Fläche: $M_{x,1}=\iint\limits_B y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}b$

2. (Trägheits-)Moment = Abstand^2 × Dichte × Fläche: $M_{x,2}=\iint\limits_B y^2\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}b$

Schwerpunkt: $$(x_S,y_S)=\left(\frac{M_{y,1}}{m},\frac{M_{x,1}}{m}\right)=\left(\frac{\iint\limits_B x\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}b}{\iint\limits_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}b},\frac{\iint\limits_B y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}b}{\iint\limits_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}b}\right)$$

(x–Komponente betrifft Abstand von der y–Achse usw.!)



$$\begin{aligned}B&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{x}\right\}\\&\quad\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2-x\right\}\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 1,\ y^2\le x\le 2-y\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m&=\iint\limits_B 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\sqrt{x}}2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(\int\limits_0^{2-x}2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\int\limits_0^1(2\sqrt{x}-0)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(2(2-x)-0)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[4x-x^2\right]_1^2\\&=\frac{4}{3}+4-3=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

wichtig: variable Grenzen innen!

oder: $$\begin{aligned}m&=\iint\limits_B 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{y^2}^{2-y}2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=2\int\limits_0^1\left((2-y)-y^2\right)\mathrm{d}y=2\left[2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1\\&=2\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\,\frac{12-3-2}{6}=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{x,1}&=\iint\limits_B 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{y^2}^{2-y}2y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_0^1 2y\,[x]_{y^2}^{2-y}\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1 2y(2-y-y^2)\,\mathrm{d}y\\&=\int\limits_0^1(4y-2y^2-2y^3)\,\mathrm{d}y=\left[2y^2-\frac{2}{3}y^3-\frac{y^4}{2}\right]_0^1=2-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{12-4-3}{6}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{y,1}&=\iint\limits_B 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{y^2}^{2-y}2x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left[x^2\right]_{y^2}^{2-y}\mathrm{d}y=\int\limits_0^1\left((2-y)^2-y^4\right)\mathrm{d}y\\&=\int\limits_0^1\left((y-2)^2-y^4\right)\mathrm{d}y=\left[\frac{(y-2)^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{7}{3}-\frac{1}{5}=\frac{35-3}{15}=\frac{32}{15}\end{aligned}$$

$$x_S = \frac{32/15}{7/3} = \frac{32}{35}, \;\; y_S = \frac{5/6}{7/3} = \frac{5}{14}$$

Die Masse der Fläche beträgt $\frac{7}{3}$, ihr Schwerpunkt liegt im Punkt $\left(\frac{32}{35}, \frac{5}{14}\right)$. Das ist ein bei Betrachtung des Bildes der Fläche plausibles Ergebnis.