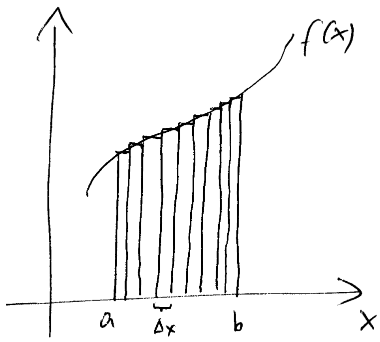
Aufgabe 20.1

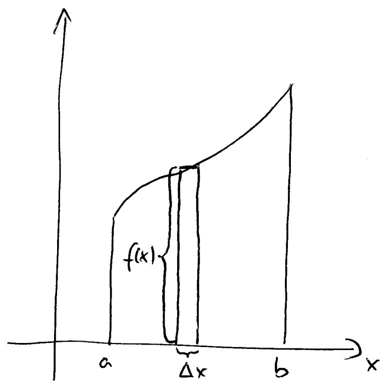
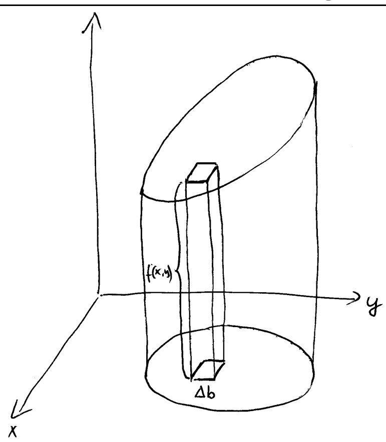
Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. Berechnen Sie $\iint\limits_B (x+y^3)\,db$!

Lösung:

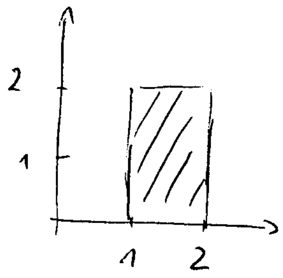
Bereichsintegrale: Verallgemeinerung des bestimmten Integrals auf ebene bzw. räumliche Integrationsbereiche (Flächen bzw. Körper)

Bestimmtes Integral:
Summe kleiner Rechteckflächen:
Kleine Intervalllänge mal Funktionswert,
Grenzwert ist Flächeninhalt,
$\int$ ist stilisiertes S für Summe



1D: Integral über Intervall	2D: Ebenes Bereichsintegral	3D: Räumliches Bereichsint.
		
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \sum f(x)\,\Delta x$ $\sum$ Fkt.wert $\times$ kleine Strecke	$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b = \lim\limits_{\Delta b\to 0} \sum f\,\Delta b$ $\sum$ Fkt.wert $\times$ kleine Fläche	$\iiint\limits_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}k = \lim\limits_{\Delta k\to 0} \sum f\Delta k$ $\sum$ Fkt.wert $\times$ kleines Vol.
Flächeninhalt unter $f(x)$: $A = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Volumen unter $f(x,y)$: $V = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}b$	
Länge des Intervalls $[a,b]$: $l = \int\limits_a^b \mathrm{d}x = \lim \sum \Delta x = b-a$	Flächeninhalt von B: $A = \lim \sum \Delta b = \iint\limits_B \mathrm{d}b$	Volumen von K: $V = \lim \sum \Delta k = \iiint\limits_K \mathrm{d}k$
Masse des Intervalls: $m = \int\limits_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$	Masse des Fläche: $m = \iint\limits_B \rho(x,y)\,\mathrm{d}b$	Masse des Körpers: $m = \iiint\limits_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}k$

Merkstoff zu Bereichsintegralen



$\mathrm{d}b = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
Darstellung als iteriertes Integral,
Integrationsreihenfolge beliebig, da feste Grenzen

$$\int_0^2\int_1^2 (x+y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\left(\int_1^2 (x+y^3)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^2\left[\frac{x^2}{2}+y^3x\right]_1^2\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2\left[2+2y^3-\frac{1}{2}-y^3\right]\mathrm{d}y = \int_0^2\left(y^3+\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{y^4}{4}+\frac{3}{2}y\Big|_0^2 = 4+3 = \underline{\underline{7}}$$

oder: $$\int_1^2\int_0^2 (x+y^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2\left(\int_0^2 (x+y^3)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_1^2\left[xy+\frac{y^4}{4}\right]_0^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 (2x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}+4x\Big|_1^2 = 4+8-1-4 = \underline{\underline{7}}$$