Aufgabe 19.24

Berechnen Sie die Divergenz und Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$,

veranschaulichen Sie es durch Pfeile und zeichnen Sie das Feldlinienbild!

Lösung:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}0 = -\frac{-y\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{-x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x^2+y^2-x^2\ +\ x^2+y^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\ (x^2+y^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Stellt man die Argumente $\vec{x}$ in Zylinderkoordinaten $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$ dar, so erhält man $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{r\sin\varphi}{r} \\ \dfrac{r\cos\varphi}{r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$. Auf der z–Achse, d.h. für $r=0$ ist das Feld nicht definiert, ansonsten besteht es also aus Vektoren der Länge 1 tangential zum Kreis mit Radius 1 um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, der ja durch $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ darstellbar ist. Feldlinien sind damit in jeder Höhe z alle konzentrischen Kreise um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.