Aufgabe 19.23

Betrachtet wird das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2 \\ -2xy/(x^2+y^2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^2+y^2 \geq 1$.

Zeigen Sie, dass es sich dabei bis auf einen konstanten Faktor um die in Aufgabe 19.3 beschriebene Kreiszylinderumströmung handelt und dass diese quellen- und wirbelfrei ist!

Lösung:

In Aufgabe 19.3 ist das (ebene) Vektorfeld in Polarkoordinaten beschrieben. Deshalb substituieren wir $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. z bleibt unverändert, so dass es sich um Zylinderkoordinaten handelt.

Formeln für den doppelten Winkel: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$,
$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = 1 - 2\sin^2\varphi$.

$$u(x,y) = 1 + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{r^2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{r^4(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2} = 1 - \frac{\cos 2\varphi}{r^2}$$

$$v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)^2} = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2}$$

Wegen $x^2+y^2 \geq 1$ ist $r \geq 1$. Somit gilt $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1-\cos 2\varphi/r^2 \\ -\sin 2\varphi/r^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r \geq 1$. Das ist das doppelte der in Aufgabe 19.3d) betrachteten Funktion. Somit wird hier auch hier der Kreiszylinder $x^2+y^2 = 1$ umströmt, wobei die Geschwindigkeit doppelt so groß ist.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{u} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{-2x(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} + \frac{-2x(x^2+y^2)^2 + 2xy2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2x(x^2+y^2) - 4xy^2 + 4x^3 - 2x(x^2+y^2) + 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{-4x(x^2+y^2) + 4xy^2 + 4x^3}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-4x^3 - 4xy^2 + 4xy^2 + 4x^3}{(x^2+y^2)^3} = 0, \text{ d.h. quellenfrei}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1+\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)\right)\vec{k} \\
&= \left(\frac{-2y(x^2+y^2)^2 + 2xy2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} - \frac{2y(x^2+y^2)^2 - (y^2-x^2)2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}\right)\vec{k} \\
&= \frac{-2y(x^2+y^2) + 8x^2y - 2y(x^2+y^2) + (y^2-x^2)4y}{(x^2+y^2)^3}\vec{k} = \frac{-4y(x^2+y^2) + 8x^2y + 4y^3 - 4x^2y}{(x^2+y^2)^3}\vec{k} \\
&= \frac{-4yx^2 - 4y^3 + 8x^2y + 4y^2 - 4x^2y}{(x^2+y^2)^3}\vec{k} = \vec{0}, \text{ d.h. wirbelfrei}
\end{aligned}$$

Somit ist die beschriebene Kreiszylinderumströmung quellen- und wirbelfrei.