Aufgabe 19.21

Zeigen Sie, dass das Feld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} - z \\ \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^2}} + z\cos yz \\ y\cos yz - x \end{pmatrix}$ wirbelfrei ist und berechnen Sie sein Potenzial!

Lösung:

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+y^2}-z & \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^2}}+z\cos yz & y\cos yz - x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos yz - yz\sin yz - \cos yz + yz\cos yz \\ -(-1-(-1)) \\ \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \dfrac{2y}{2\sqrt{1+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ also ist das Feld wirbelfrei.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+y^2} - z$$

$$U(x,y,z) = \int\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+y^2}-z\right)\mathrm{d}x + C(y,z) = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} + x\sqrt{1+y^2} - xz + C(y,z)$$
$$= \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} - xz + C(y,z)$$

(Dabei ist die Substitution $t = 1+x^2$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$, $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$, $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(1+x^2) = x\,\mathrm{d}x$ verwendet worden, ohne t explizit zu notieren.)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x\cdot 2y}{2\sqrt{1+y^2}} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}} + z\cos yz, \quad \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = z\cos yz$$
$$C(y,z) = \int z\cos yz\,\mathrm{d}y + D(z) = \int \cos yz\,\mathrm{d}(yz) + D(z) = \sin yz + D(z)$$

(Dabei ist die Substitution $t = yz$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = z$, $\mathrm{d}t = z\,\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}(yz) = z\,\mathrm{d}y$ verwendet worden, ohne t explizit zu notieren.)

$$U(x,y,z) = \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} - xz + \sin yz + D(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -x + y\cos yz + D'(z) = y\cos yz - x, \quad D'(z) = 0, \quad D(z) = E$$

Also ist das gesuchte Potenzial $U(x,y,z) = \sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} - xz + \sin yz + E$.