

Aufgabe 19.19

Untersuchen Sie das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos x \sin y \sin z \\ \sin x \cos y \sin z \\ \sin x \sin y \cos z \end{pmatrix}$ auf Quellen- und Wirbelfreiheit!

Handelt es sich um ein Potenzialfeld? Bestimmen Sie ggf. sein Potenzial!

Lösung:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\sin x \sin y \sin z - \sin x \sin y \sin z - \sin x \sin y \sin z = -3 \sin x \sin y \sin z \neq 0 \\ \implies \text{nicht quellenfrei}$$

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \cos x \sin y \sin z & \sin x \cos y \sin z & \sin x \sin y \cos z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \cos y \cos z - \sin x \cos y \cos z \\ -(\cos x \sin y \cos z - \cos x \sin y \cos z) \\ \cos x \cos y \sin z - \cos x \cos y \sin z \end{pmatrix} \equiv \vec{0}$$

\implies wirbelfrei und damit ein Potenzialfeld

Potenzial $U(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + C$ offensichtlich ($\nabla U = \vec{u}$)

Wenn das nicht gesehen wird:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \cos x \sin y \sin z \implies U(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + A(y, z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sin x \cos y \sin z + \frac{\partial A}{\partial y} = \sin x \cos y \sin z \implies \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad A(y, z) = B(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sin x \sin y \cos z + \frac{dB}{dz} = \sin x \sin y \cos z \implies \frac{dB}{dz} = 0, \quad B(z) = C$$

$$U(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + C$$