Aufgabe 19.15

Berechnen Sie die Divergenz und Rotation folgender Vektorfelder:

a) $\vec{u}(\vec{x})=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, b) $\vec{u}(\vec{x})=\begin{pmatrix}x\\x\\-z\end{pmatrix}$, c) $\vec{u}(\vec{x})=\begin{pmatrix}2xy+2xz^2+3x^2\\x^2+z^2+2y\\2yz+2x^2z+1\end{pmatrix}$!

Welche der Felder sind quellen- bzw. wirbelfrei?

Lösung:

Sei $\vec{u}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Divergenz des Vektorfeldes $\vec{u}(\vec{x})$:

$$\operatorname{div}\vec{u}=\operatorname{div}\begin{pmatrix}u(x,y,z)\\v(x,y,z)\\w(x,y,z)\end{pmatrix}=\nabla\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\quad\text{(Skalar)}$$

Rotation des Vektorfeldes $\vec{u}(\vec{x})$:

$$\operatorname{rot}\vec{u}=\operatorname{rot}\begin{pmatrix}u(x,y,z)\\v(x,y,z)\\w(x,y,z)\end{pmatrix}=\nabla\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\u&v&w\end{vmatrix}\quad\text{(Vektor)}$$

quellenfrei: $\operatorname{div}\vec{u}\equiv 0$, wirbelfrei: $\operatorname{rot}\vec{u}\equiv\vec{0}$

a) $$\operatorname{div}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3,\quad\text{nicht quellenfrei}$$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\x&y&z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\\-\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\\\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad\text{wirbelfrei}$$

b) $$\operatorname{div}\begin{pmatrix}x\\x\\-z\end{pmatrix}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial z}=1-1=0,\quad\text{quellenfrei}$$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}x\\x\\-z\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\x&x&-z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial z}\\-\left(-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\\\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad\text{nicht wirbelfrei}$$

c) $$\operatorname{div}\begin{pmatrix}2xy+2xz^2+3x^2\\x^2+z^2+2y\\2yz+2x^2z+1\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+2xz^2+3x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2+z^2+2y)+\frac{\partial}{\partial z}(2yz+2x^2z+1)$$

$$=2y+2z^2+6x+2+2y+2x^2=2x^2+6x+4y+2z^2+2,\quad\text{nicht quellenfrei}$$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} 2xy+2xz^2+3x^2 \\ x^2+z^2+2y \\ 2yz+2x^2z+1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy+2xz^2+3x^2 & x^2+z^2+2y & 2yz+2x^2z+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2z-2z \\ -(4xz-4xz) \\ 2x-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wirbelfrei}$$

Aus Aufgabe 19.13 ist bekannt, dass das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x})$ aus c) ein Potenzialfeld ist. Man kann zeigen, dass ein Vektorfeld genau dann ein Potenzialfeld ist, wenn es wirbelfrei ist.

Ein Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x})$ heißt Potenzialfeld, wenn es ein Skalarfeld $U(\vec{x})$ gibt, so dass $\vec{u} = \operatorname{grad} U$ gilt. Davon, dass jedes Potenzialfeld wirbelfrei ist, d.h., dass für Potenzialfelder $\operatorname{rot}\vec{u} = \vec{0}$ gilt, kann man sich leicht überzeugen:

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \nabla \times \nabla U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$