Aufgabe 19.14

Das Potenzial $U(\vec{x})$ eines konservativen Feldes $\vec{F}(\vec{x})$ hänge nur vom Abstand vom Koordiantenursprung ab: $U(\vec{x})=f(\|\vec{x}\|)$, wobei $f(r)$ eine differenzierbare Funktion sei. Bestimmen Sie $\vec{F}(\vec{x})$!

Lösung:

Ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ heißt **konservatives Feld** oder **Potenzialfeld**, wenn es Gradient eines Skalarfeldes $U(\vec{x})$ ist, d.h. $\vec{v}=\operatorname{grad}U=\nabla U$. $U(\vec{x})$ heißt dann Potenzial des Vektorfeldes.

(Zur Begriffsbildung: Sei $\vec{v}$ ein Kraftfeld, dann ist das Potenzial U die (potenzielle) Energie. „Konservativ“: Es gilt der Energieerhaltungssatz.)

$$\vec{F}(\vec{x})=\nabla U(\vec{x})=\nabla f(\|\vec{x}\|)=\nabla f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\[2mm] f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\[2mm] f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{pmatrix}=\frac{f'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=f'(\|\vec{x}\|)\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

(Vgl. Aufgabe 18.29, die dort behandelte Funktion entspricht dem Fall $f(r)=r$.)