Aufgabe 19.13

Ein Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x})$ heißt **Potenzialfeld**, wenn es Gradient eines Skalarfeldes $U(\vec{x})$ (d.h. einer skalarwertigen Funktion eines Vektors) ist, d.h. $\vec{u} = \operatorname{grad} U = \nabla U$ gilt.

Das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2z + 1 \end{pmatrix}$ ist ein Potenzialfeld. Ermitteln Sie ein Potenzial durch sukzessive Integration nach dx (d.h. $U(x,y,z) = \int \frac{\partial U}{\partial x} \mathrm{d}x + C(y,z)$), dy und dz !

Lösung:

$$\vec{u} = \nabla U = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2z + 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 2xz^2 + 3x^2, \quad U(x,y,z) = \int (2xy + 2xz^2 + 3x^2)\,\mathrm{d}x + C(y,z) = x^2y + x^2z^2 + x^3 + C(y,z)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y} = x^2 + z^2 + 2y$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial y} = z^2 + 2y, \quad C(y,z) = \int (z^2 + 2y)\,\mathrm{d}y + D(z) = z^2y + y^2 + D(z)$$

$$U(x,y,z) = x^2y + x^2z^2 + x^3 + z^2y + y^2 + D(z) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2x^2z + 2yz + D'(z) = 2yz + 2x^2z + 1$$

$$\longrightarrow \quad D'(z) = 1, \quad D(z) = z + E, \quad \underline{\underline{U(x,y,z) = x^2y + x^2z^2 + x^3 + z^2y + y^2 + z + E}}$$