

Aufgabe 19.12

$$\begin{aligned} \text{Lösen Sie das Gleichungssystem} \quad & -2\sqrt{x} + 3y^2 &= & 0,23 \\ & 4x\sqrt{x} - 5y &= & 0,824 \\ & z^3 + 6z^2 + 5z &= & 14,091 \end{aligned}$$

mit dem Newtonverfahren und dem Startwert $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)!$

Lösung:

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{x} + 3y^2 - 0,23 \\ 4x\sqrt{x} - 5y - 0,824 \\ z^3 + 6z^2 + 5z - 14,091 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{x}} & 6y & 0 \\ 6\sqrt{x} & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 + 12z + 5 \end{pmatrix}$$

Ermittlung der Inversen der Jacobimatrix $\vec{f}'(x, y, z)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{\sqrt{x}} & 6y & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6\sqrt{x} & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 + 12z + 5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -6\sqrt{xy} & 0 & -\sqrt{x} & 0 & 0 \\ 0 & 36xy - 5 & 0 & 6x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 + 12z + 5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -6\sqrt{xy} & 0 & -\sqrt{x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6x}{36xy-5} & \frac{1}{36xy-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 + 12z + 5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{x}}{36xy-5} & \frac{6\sqrt{xy}}{36xy-5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6x}{36xy-5} & \frac{1}{36xy-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3z^2+12z+5} \end{array}$$

Newtonschritt:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{x_n}}{36x_n y_n - 5} & \frac{6\sqrt{x_n} y_n}{36x_n y_n - 5} & 0 \\ \frac{6x_n}{36x_n y_n - 5} & \frac{1}{36x_n y_n - 5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3z_n^2 + 12z_n + 5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sqrt{x_n} + 3y_n^2 - 0,23 \\ 4x_n\sqrt{x_n} - 5y_n - 0,824 \\ z_n^3 + 6z_n^2 + 5z_n - 14,091 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{31} & \frac{6}{31} & 0 \\ \frac{6}{31} & \frac{1}{31} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,77 \\ -1,824 \\ -2,091 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2288387 \\ 0,9098065 \\ 1,1045500 \end{pmatrix}$$

n	x_n	y_n	z_n
0	1	1	1
1	1,228838710	0,9098064516	1,104550000
2	1,210138342	0,9000877355	1,100008794
3	1,210000009	0,9000000064	1,100000000
4	1,210000000	0,8999999999	1,100000000
exakt	1,21	0,9	1,1