Aufgabe 19.10

Lösen Sie das Gleichungssystem $\begin{array}{l} \sin x - y = 0 \\ x - \cos y = 0 \end{array}$ mit dem Newtonverfahren für das System!

Lösung:

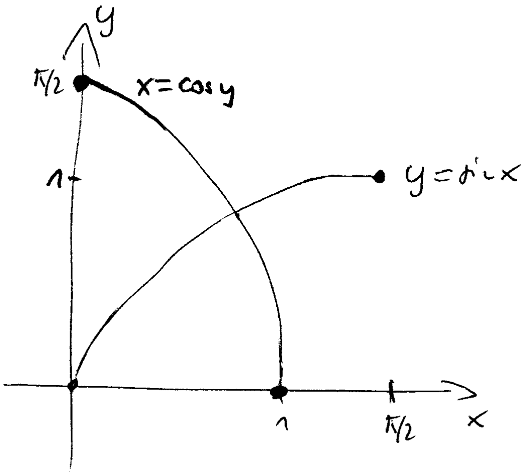
$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \sin x - y \\ x - \cos y \end{pmatrix} = \vec{0}, \qquad \vec{f}\,'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos x & -1 \\ 1 & \sin y \end{pmatrix}$

$\left(\vec{f}\,'(\vec{x})\right)^{-1} = \dfrac{1}{\cos x \sin y + 1} \begin{pmatrix} \sin y & 1 \\ -1 & \cos x \end{pmatrix}$ (s. z.B. Aufgabe 6.175a))

Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens: $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left(\vec{f}\,'(\vec{x}_n)\right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n)$, d.h.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos x_n \sin y_n + 1} \begin{pmatrix} \sin y_n & 1 \\ -1 & \cos x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x_n - y_n \\ x_n - \cos y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos x_n \sin y_n + 1} \begin{pmatrix} \sin x_n \sin y_n - y_n \sin y_n + x_n - \cos y_n \\ -\sin x_n + y_n + x_n \cos x_n - \cos x_n \cos y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suchen geeignete Startnäherung:



geeignet z.B. $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos 1 \sin 1 + 1} \begin{pmatrix} \sin^2 1 - \sin 1 + 1 - \cos 1 \\ -\sin 1 + 1 + \cos 1 - \cos^2 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}77568459 \\ 0{,}72027285 \end{pmatrix}$$

n	x_n	y_n
0	1	1
1	0,77568459	0,72027285
2	0,76832706	0,69495215
3	0,76816916	0,69481970
4	0,76816916	0,69481969
5	0,76816916	0,69481969

$\underline{\underline{x \approx 0{,}76816916,\ y \approx 0{,}69481969.}}$

(Wäre in der Aufgabenstellung nicht gefordert, das Newtonverfahren für das Gleichungssystem anzuwenden, so könnte auch eine Gleichung in die andere eingesetzt und dann z.B. mit dem Newtonverfahren die skalare Gleichung $x - \cos \sin x = 0$ gelöst werden.)