Aufgabe 19.9

Auf das nichtlineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x^4 + 2xy^2 &= 3{,}1 \\ x^2y + y^3 &= 2{,}1 \end{aligned}$$
soll das Newtonverfahren angewendet werden.

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems an!

b) Ermitteln Sie überschlägig eine geeignete Startnäherung!

c) Führen Sie für diese Startnäherung einen Iterationsschritt aus!

Lösung:

a) $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^4+2xy^2-3{,}1 \\ x^2y+y^3-2{,}1 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\vec{f}\,'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 4x^3+2y^2 & 4xy \\ 2xy & x^2+3y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x^3+2y^2 & 4xy \\ 2xy & x^2+3y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_n^4+2x_ny_n^2-3{,}1 \\ x_n^2y_n+y_n^3-2{,}1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{4x^4+12x^3y^2-6x^2y^2+6y^4} \begin{pmatrix} x^2+3y^2 & -4xy \\ -2xy & 4x^3+2y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^4+2x_ny_n^2-3{,}1 \\ x_n^2y_n+y_n^3-2{,}1 \end{pmatrix}$$

(s. z.B. Aufgabe 6.175a))

b)
$$\begin{aligned} x^4 + 2xy^2 &\approx 3 \\ x^2y + y^3 &\approx 2 \end{aligned}$$

Dieses System wird offensichtlich von $x=y=1$ gelöst, somit ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine geeignete Startnäherung.

c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{0{,}1}{16} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}025 \end{pmatrix}$

Die Weiterrechnung führt auf

n	x_n	y_n
0	1	1
1	1	1,025
2	1,000145524	1,024469908
3	1,000151588	1,024469690
4	1,000151423	1,024469690
5	1,000151428	1,024469690
6	1,000151428	1,024469690