Aufgabe 19.8

Lösen Sie iterativ das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{aligned} 2x^5 + \ y^5 &= 3 \\ x^8 + 2y^8 &= 3{,}05 \end{aligned}$!

Lösung:

Newtonverfahren (quadratisch konvergent) für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^5 + \ y^5 - 3 \\ x^8 + 2y^8 - 3{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} 10x^4 & 5y^4 \\ 8x^7 & 16y^7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10x_n^4 & 5y_n^4 \\ 8x_n^7 & 16y_n^7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_n^5 + \ y_n^5 - 3 \\ x_n^8 + 2y_n^8 - 3{,}05 \end{pmatrix}$$

Zur Ermittlung einer Startnäherung wird die Zahl 3,05 auf der rechten Seite überschlagsweise durch 3 ersetzt, dann ist $x = y = 1$ offensichtlich Lösung des Gleichungssystems. Deshalb wird als Startnäherung $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwendet.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}05 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rr|rr} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 16 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & \frac{1}{8} \\ 10 & 5 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -15 & 1 & -\frac{10}{8} \\ \hline 1 & 2 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{15} & \frac{10}{120} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{5}{120} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{15} & \frac{10}{120} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{5 \cdot 0{,}05}{120} \\ 1 + \frac{10 \cdot 0{,}05}{120} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}99791667 \\ 1{,}00416667 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Allgemein gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und damit

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{40x_n^4 y_n^4 (4y_n^3 - x_n^3)} \begin{pmatrix} 16y_n^7 & -5y_n^4 \\ -8x_n^7 & 10x_n^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_n^5 + \ y_n^5 - 3 \\ x_n^8 + 2y_n^8 - 3{,}05 \end{pmatrix}.$$

Das Durchrechnen dieses Algorithmus ergibt

n	x_n	y_n
0	1	1
1	0,99791667	1,00416667
2	0,99792722	1,00409476
3	0,99792722	1,00409473
4	0,99792722	1,00409473

.

Also hat das nichtlineare Gleichungssystem die Lösung $\underline{\underline{x \approx 0{,}99792722, \ y \approx 1{,}00409473}}$.