Aufgabe 19.7

Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + 4y &= 13 \\ x + 3y^2 &= 6 \end{aligned}$$

an und führen Sie einen Iterationsschritt mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (2, 2)$ aus!

Lösung:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2+4y-13 \\ x+3y^2-6 \end{pmatrix} = \vec{0}, \qquad \vec{f}\,'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 4 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{f}\,'(\vec{x})\right)^{-1} = \frac{1}{12xy-4} \begin{pmatrix} 6y & -4 \\ -1 & 2x \end{pmatrix}$$ (s. z.B. Aufgabe 6.175a))

Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens: $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left(\vec{f}\,'(\vec{x}_n)\right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{12x_ny_n-4} \begin{pmatrix} 6y_n & -4 \\ -1 & 2x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^2+4y_n-13 \\ x_n+3y_n^2-6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -44 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$$

Das weitere Durchrechnen des Algorithmus ergibt

n	x_n	y_n
0	2	2
1	3	1,25
2	2,98170732	1,02743902
3	2,99978719	1,00040092
4	2,99999995	1,00000009
5	3,00000000	1,00000000
6	3,00000000	1,00000000
exakt	3	1

.