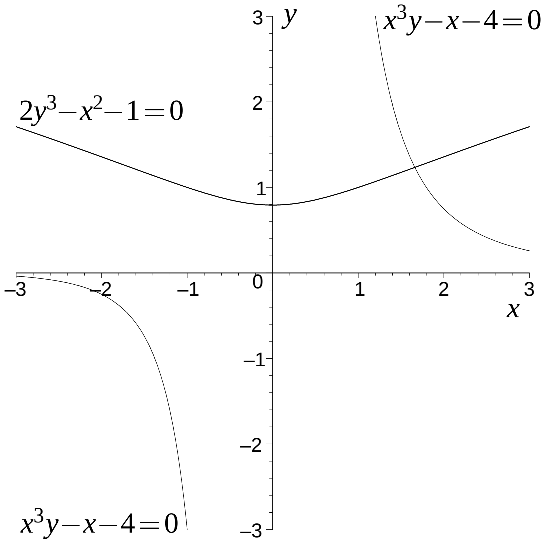
Aufgabe 19.6

Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem $\begin{array}{l} 2y^3 - x^2 - 1 = 0 \\ x^3 y - x \;\; - 4 = 0 \end{array}$ mit dem Newtonverfahren!

Lösung:

Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens für $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$: $\boxed{\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left(\vec{f}\,'(\vec{x}_n)\right)^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n)}$



Zunächst wird eine geeignete Startnäherung $\vec{x}_0$ benötigt, hierfür kann die durch Plotten der Kurven $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2+1}}$ und $y = \dfrac{x+4}{x^3}$ entstandene nebenstehende Skizze verwendet werden.

Als Startnäherung bietet sich also z.B. $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2y^3 - x^2 - 1 \\ x^3 y - x - 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}\,'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x & 6y^2 \\ 3x^2 y - 1 & x^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2x_n & 6y_n^2 \\ 3x_n^2 y_n - 1 & x_n^3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2y_n^3 - x_n^2 - 1 \\ x_n^3 y_n - x_n - 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{6y_n^2 - 2x_n^4 - 18x_n^2 y_n^3} \begin{pmatrix} x_n^3 & -6y_n^2 \\ 1 - 3x_n^2 y_n & -2x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y_n^3 - x_n^2 - 1 \\ x_n^3 y_n - x_n - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(s. Aufgabe 6.175a))

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{-98} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{98} \begin{pmatrix} -36 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80/49 \\ 123/98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}632653061 \\ 1{,}255102041 \end{pmatrix}$$

n	x_n	y_n	$f_1(x_n,y_n)$	$f_2(x_n,y_n)$
0	2	1	−3	2
1	1,632653061	1,255102041	0,288721111	−0,170539104
2	1,661445708	1,234502088	0,002349176	0,000299108
3	1,661526439	1,234274515	3,77062E−07	−1,12047E−07
4	1,661526467	1,234274484	7,10543E−15	0
5	1,661526467	1,234274484	0	0
6	1,661526467	1,234274484	0	0

Somit ergibt sich als Lösung $x \approx 1{,}661526467$, $y \approx 1{,}234274484$.