Aufgabe 19.5

Zeigen Sie, dass man bei der Anwendung des Newtonverfahrens auf die Lösung

a) einer linearen Gleichung,
b) eines eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystems

in einem Schritt unabhängig von der Startnäherung die exakte Lösung erhält!

Lösung:

Newtonverfahren (Tangentenverfahren) zur Nullstellenbestimmung (differenzierbarer) nichtlinearer Funktionen: Statt Nullstelle der Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ wird Nullstelle ihrer linearen Approximation (Tangente) gesucht (s. z.B. Aufgabe 12.62):

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0,\quad x-x_0=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\quad \text{Nullstelle der Tangente also: } x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

usw.

Analog für (total differenzierbare) Funktionen $\vec{f}:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$: $\vec{f}(\vec{x})=\vec{0}$ wird approximiert durch:

$$\vec{f}(\vec{x}_0)+\vec{f}\,'(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)=\vec{0},\quad \vec{x}-\vec{x}_0=-\left(\vec{f}\,'(\vec{x}_0)\right)^{-1}\vec{f}(\vec{x}_0),\quad \text{also: } \vec{x}_1=\vec{x}_0-\left(\vec{f}\,'(\vec{x}_0)\right)^{-1}\vec{f}(\vec{x}_0),$$

usw.

Dabei ist $\vec{f}\,'(\vec{x})$ die Jacobimatrix, das ist die Matrix der ersten partiellen Ableitungen (vgl. Aufgabe 19.4): $\vec{f}\,'(\vec{x})=\begin{pmatrix} f_{1x^1} & f_{1x^2} & \cdots & f_{1x^k}\\ f_{2x^1} & f_{2x^2} & \cdots & f_{2x^k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{kx^1} & f_{kx^2} & \cdots & f_{kx^k}\end{pmatrix}$ (obere Indizes: Komponenten von $\vec{x}$).

Handelt es sich nun um eine lineare Gleichung im $\mathbb{R}$ oder im $\mathbb{R}^k$ (lineares Gleichungssystem), so fällt diese naturgemäß mit ihrer Linearisierung zusammen, so dass die Nullstellenbestimmung der Linearisierung nichts anderes ist als die der gegebenen Gleichung, so dass man in einem Schritt deren exakte Lösung erhält.

Davon kann man sich auch durch Anwendung der Iterationsvorschriften auf lineare Gleichungen überzeugen:

a) $ax=b$: $f(x)=ax-b=0,\ f'(x)=a,\ x_1=x_0-\dfrac{ax_0-b}{a}=\dfrac{b}{a}=a^{-1}b$, das ist die Lösung von $ax=b$

b) $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$: $\vec{f}(\vec{x})=\boldsymbol{A}\vec{x}-\vec{b}=\left(\sum\limits_{j=1}^{k}a_{ij}x^j-b_i\right)_{i=1}^{k}=\vec{0},\quad \dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}=a_{ij}\ \Rightarrow\ \vec{f}\,'(\vec{x})=\boldsymbol{A},$

$\vec{x}_1=\vec{x}_0-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\vec{x}_0-\vec{b})=\vec{x}_0-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\vec{x}_0+\boldsymbol{A}^{-1}\vec{b}=\boldsymbol{A}^{-1}\vec{b}$, das ist die Lösung von $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b}$