Aufgabe 19.4

Ein Produkt wird in unterschiedlichen Qualitäten von 2 Herstellern produziert. Hersteller 1 muss für die Herstellung von einem Stück 4 €, Hersteller 2 muss 5 € aufwenden. Die von den Preisen p_1 für ein Stück des Herstellers 1 und p_2 für ein Stück des Herstellers 2 abhängige Nachfrage betrage $N_1(p_1,p_2)=40\,000-20\,000\,p_1+10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 1 und $N_2(p_1,p_2)=60\,000+10\,000\,p_1-10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 2.

a) Stellen Sie den Gewinn der beiden Hersteller als vektorwertige Funktion $\vec{G}$ des Preises $\vec{p}$ dar!
b) Berechnen Sie für $p_1=6$, $p_2=9$ den Gewinn $\vec{G}(\vec{p})$ und die Jacobimatrix $\vec{G}\,'(\vec{p})$!
c) Ermitteln Sie mithilfe der Jacobimatrix näherungsweise, wie sich der Gewinn entwickelt, wenn der Preis p_1 von 6,00 auf 6,10 € erhöht und der Preis p_2 gleichzeitig von 9,00 auf 8,90 € gesenkt wird!
d) Geben Sie $\vec{G}\left(\begin{pmatrix}6{,}1\\8{,}9\end{pmatrix}\right)$ exakt an! Vergleichen Sie die tatsächliche Gewinnentwicklung mit der mithilfe der Jacobimatrix vorausgesagten!

Lösung:

a) vgl. Aufgabe 18.8: Gewinn = Umsatz − Kosten = Nachfrage ∗ (Preis − Aufwand):

$$\vec{G}(\vec{p})=\begin{pmatrix}G_1(p_1,p_2)\\G_2(p_1,p_2)\end{pmatrix}=10\,000\begin{pmatrix}(4-2p_1+p_2)\,(p_1-4)\\(6+\;p_1-p_2)\,(p_2-5)\end{pmatrix}$$

b) $$\vec{G}\left(\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right)=10\,000\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}$$

Bei den angegebene Preisen erzielt der Hersteller 1 einen Gewinn von 20 000 €, während der Hersteller 2 einen Gewinn von 120 000 € erzielt.

Da alle partiellen Ableitungen von $\vec{G}(\vec{p})$ stetig sind, ist die Funktion $\vec{G}(\vec{p})$ total differenzierbar, ihre Ableitung ist die Jacobimatrix, das ist die Matrix der partiellen Ableitungen:

$$\vec{G}\,'(\vec{p})=\begin{pmatrix}G_{1p_1} & G_{1p_2}\\G_{2p_1} & G_{2p_2}\end{pmatrix}=10\,000\begin{pmatrix}-2(p_1-4)+(4-2p_1+p_2) & p_1-4\\p_2-5 & -(p_2-5)+(6+p_1-p_2)\end{pmatrix}$$
$$=10\,000\begin{pmatrix}-4p_1+p_2+12 & p_1-4\\p_2-5 & p_1-2p_2+11\end{pmatrix}$$
$$\vec{G}\,'\left(\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right)=10\,000\begin{pmatrix}-3 & 2\\4 & -1\end{pmatrix}$$

c) Da $\vec{G}(\vec{p})$ total differenzierbar ist, gilt $\Delta\vec{G}\approx\mathrm{d}\vec{G}$, $\mathrm{d}\vec{G}$ ist dabei das vollständige Differenzial:

$$\mathrm{d}\vec{G}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}G_1\\\mathrm{d}G_2\end{pmatrix}=\vec{G}\,'(\vec{p})\,\mathrm{d}\vec{p}=\begin{pmatrix}G_{1p_1} & G_{1p_2}\\G_{2p_1} & G_{2p_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}p_1\\\mathrm{d}p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_{1p_1}\mathrm{d}p_1+G_{1p_2}\mathrm{d}p_2\\G_{2p_1}\mathrm{d}p_1+G_{2p_2}\mathrm{d}p_2\end{pmatrix}$$
$$=10\,000\begin{pmatrix}(-4p_1+p_2+12)\,\mathrm{d}p_1+(p_1-4)\,\mathrm{d}p_2\\(p_2-5)\,\mathrm{d}p_1+(p_1-2p_2+11)\,\mathrm{d}p_2\end{pmatrix},$$

für $\vec{p}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ somit $\mathrm{d}\vec{G}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}G_1\\\mathrm{d}G_2\end{pmatrix}=10\,000\begin{pmatrix}-3p_1+2p_2\\4p_1-\;p_2\end{pmatrix}$.

Für $\mathrm{d}\vec{p}=\Delta\vec{p}=\begin{pmatrix}\Delta p_1\\\Delta p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1\\-0{,}1\end{pmatrix}$ ergibt sich schließlich $\mathrm{d}\vec{G}=10\,000\begin{pmatrix}-0{,}3-0{,}2\\0{,}4+0{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5000\\5000\end{pmatrix}$.

Der Gewinn des Herstellers 1 sinkt also um ca. 5000€. Wegen $\mathrm{d}G_1 = 10\,000\,(-3\Delta p_1 + 2\Delta p_2)$ gehen davon 3000€ auf die eigene Preiserhöhung und 2000€ auf die Preissenkung des Konkurrenten zurück. Der Gewinn des Herstellers 2 steigt dagegen um ca. 5000€, davon sind 1000€ durch die eigene Preissenkung verursacht, während 4000€ der Preiserhöhung des Konkurrenten zu verdanken sind.

d) $\vec{G}\left(\begin{pmatrix} 6{,}1 \\ 8{,}9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14\,700 \\ 124\,800 \end{pmatrix}$, nach den Preisänderungen erzielt der Hersteller 1 also nur noch einen Gewinn von 14 700 €, während sich der des Hersteller 2 einen Gewinn auf 124 800 € erzielt.

Folglich ist $\Delta\vec{G}\left(\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5300 \\ 4800 \end{pmatrix}$. Das wurde mit dem vollständigen Differenzial relativ gut vorausgesagt: $\Delta\vec{G} \approx \mathrm{d}\vec{G} = \begin{pmatrix} -5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$.

Der Vorteil der Verwendung des vollständigen Differenzials liegt daran, dass die Auswirkungen (kleiner) Preisänderungen übersichtlich dargestellt werden. So ist sofort zu sehen, dass Preiserhöhungen des „Billigherstellers“ 1 viel stärker „bestraft“ werden (Multiplikation mit $-30\,000$) als solche des Herstellers 2 (Multiplikation mit $-10\,000$).