Aufgabe 19.3

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$. Für $r \geq 1$ sei das Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(r,\varphi) \\ v(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2r^2} \\ -\frac{\sin 2\varphi}{2r^2} \end{pmatrix}$ definiert.

a) Veranschaulichen Sie das Vektorfeld durch Pfeile!
b) Zeigen Sie, dass der Einheitskreis Feldlinie ist!
c) Skizzieren Sie das Feldlinienbild!
d) Welcher physikalische Sachverhalt wird durch das Vektorfeld beschrieben?

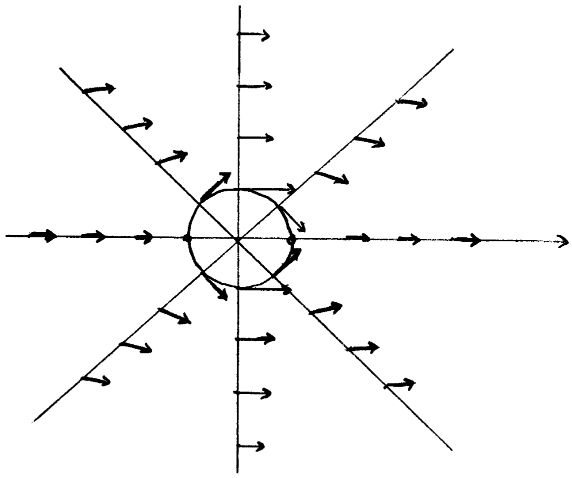
Lösung:

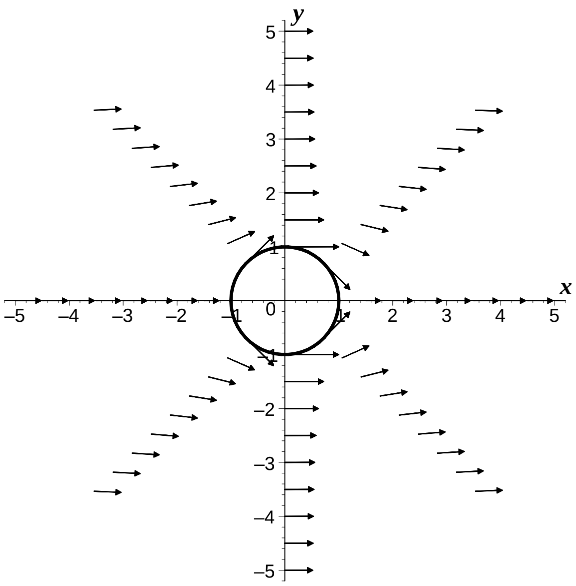
a) $\varphi = 0, \pi: \qquad \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

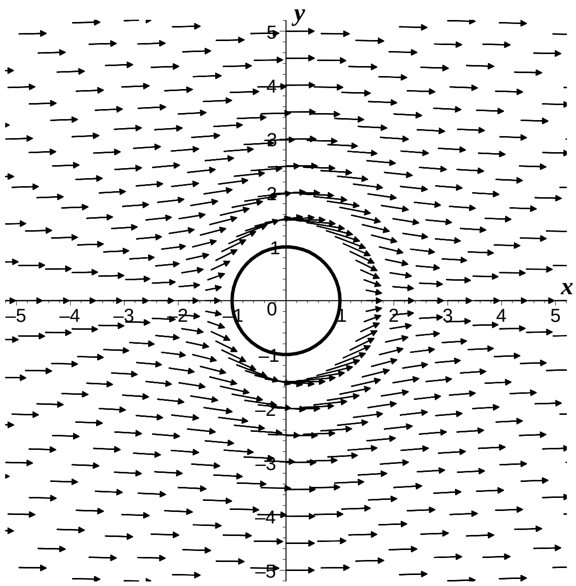
$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}: \quad \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2r^2} \end{pmatrix}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}: \quad \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}: \quad \vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2r^2} \end{pmatrix}$







b) Parameterdarstellung des Einheitskreises $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$,

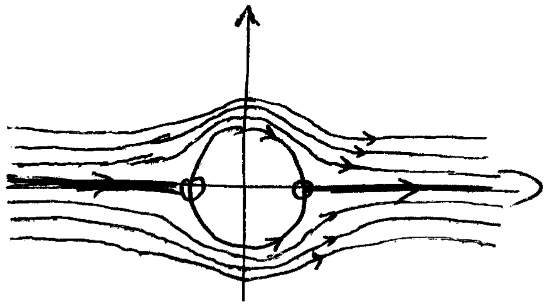
Tangentenrichtung: $\vec{x}\,'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Auf dem Einheitskreis gilt für das zu untersuchende Feld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\tilde{v}}(r,\varphi) = \vec{\tilde{v}}(1,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2} \\ -\dfrac{\sin 2\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-1+2\sin^2\varphi}{2} \\ -\dfrac{2\sin\varphi\cos\varphi}{2} \end{pmatrix} = -\sin\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Also zeigt das Feld auf dem Einheitskreis in Richtung der Tangenten des Einheitskreises. (Streng genommen gilt das nur für $\sin\varphi \neq 0$, d.h. $\varphi \neq 0, \pi$. In diesen beiden Punkten $(1,0)$ und $(-1,0)$ gilt $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$, d.h., das Vektorfeld hat keine Richtung.)

c)



d) Umströmung des Einheitskreises

Nimmt man die dritte Komponente hinzu und definiert $\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2\varphi}{2r^2} \\ -\dfrac{\sin 2\varphi}{2r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

so handelt es sich um die Umströmung eines (unendlichen) Kreiszylinders.