

Aufgabe 18.134

Über dem Intervall $-3 \leq x \leq 3$ wird die Funktion $f(x) = 12 \cos \frac{\pi}{6}x$ betrachtet. Bestimmen Sie Ihre Approximation bzw. Interpolation durch eine Parabel mittels

- a) der Methode der kleinsten Quadrate aus den Funktionswerten an den Stellen $x = -3, -2, 0, 2, 3$,
- b) Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$,
- c) Newtoninterpolation aus den Funktionswerten an den Stellen $x = -3, 0, 3$,
- d) Newtoninterpolation aus den Funktionswerten an den Stellen $x = -2, 0, 3$!

Stellen Sie in einer Tabelle die exakten Funktionswerte und die Werte auf den 4 Parabeln an den Stellen $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ gegenüber! Stellen Sie außerdem die gegebene Funktion und die Parabel aus d) grafisch dar!

Lösung:

| | | | | | | | | |
|----|-------|-------|---------|-----------|---------|---------|-------------|--|
| a) | x_i | y_i | x_i^2 | $x_i y_i$ | x_i^3 | x_i^4 | $x_i^2 y_i$ | $194a + 26c = 48 \quad \cdot 5$ |
| | -3 | 0 | 9 | 0 | -27 | 81 | 0 | $26b = 0 \rightarrow b = 0$ |
| | -2 | 6 | 4 | -12 | -8 | 16 | 24 | $26a + 5c = 24 \quad \cdot 26$ |
| | 0 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $970a + 130c = 240 \quad -$ |
| | 2 | 6 | 4 | 12 | 8 | 16 | 24 | $676a + 130c = 624 \quad +$ |
| | 3 | 0 | 9 | 0 | 27 | 81 | 0 | |
| | 0 | 24 | 26 | 0 | 0 | 194 | 48 | $-294a = 384 \rightarrow a = -\frac{64}{49}$ |

$$\rightarrow c = \frac{1}{130} \left(240 + 970 \frac{64}{49} \right) = \frac{568}{49}$$

$$P_2(x) = \frac{568 - 64x^2}{49} \approx 11.59 - 1.31x^2$$

b) $f(x) = 12 \cos \frac{\pi}{6}x \quad f(0) = 12$
 $f'(x) = -2\pi \sin \frac{\pi}{6}x \quad f'(0) = 0$
 $f''(x) = -\frac{\pi^2}{3} \cos \frac{\pi}{6}x \quad f''(0) = -\frac{\pi^2}{3}$

$$P_2(x) = 12 - \frac{\pi^2/3}{2!}x^2 \approx 12 - 1.64x^2$$

| | | | | |
|----|-------|-------|--------|--------|
| c) | x_i | y_i | 1. St. | 2. St. |
| | -3 | 0 | 4 | |
| | 0 | 12 | | -8/6 |
| | 3 | 0 | -4 | |

$$P_2(x) = 4(x+3) - \frac{8}{6}(x+3)x = 12 - \frac{4}{3}x^2 \approx 12 - 1.33x^2$$

| | | | | |
|----|-------|-------|--------|--------|
| d) | x_i | y_i | 1. St. | 2. St. |
| | -2 | 6 | 3 | |
| | 0 | 12 | -4 | -7/5 |
| | 3 | 0 | | |

$$P_2(x) = 6 + 3(x+2) - \frac{7}{5}(x+2)x = 12 + \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}x^2 = 12 + 0.2x - 1.4x^2$$

| | | | | | |
|-------|----------|-------|-----------|-----------|-----------|
| x_i | $f(x_i)$ | a) | b) | c) | d) |
| -3 | 0 | -0.16 | -2.80 | 0 | -1.2 |
| -2 | 6 | 6.37 | 5.42 | 6.67 | 6 |
| 0 | 12 | 11.59 | 12 | 12 | 12 |
| 2 | 6 | 6.37 | 5.42 | 6.67 | 6.8 |
| 3 | 0 | -0.16 | -2.80 | 0 | 0 |

Die fett gesetzten Werte sind methodenbedingt exakt.

