

Aufgabe 18.133

Um den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v eines Fahrzeuges in km/h und seinem Bremsweg s in m zu ermitteln, wurden Messungen bei $v = 10, 20, 30$ und 40 km/h vorgenommen, deren Ergebnisse in folgender Tabelle angegeben sind:

| | | | | | | | | | |
|-----|--|--|----|--|----|--|----|--|----|
| v | | | 10 | | 20 | | 30 | | 40 |
| s | | | 3 | | 9 | | 15 | | 25 |

Der Zusammenhang soll mit der Methode der kleinsten Quadrate durch einen quadratischen Ansatz $s \approx f(v) = av^2 + bv + c$ approximiert werden. Dabei soll auch der offensichtlich bekannte Bremsweg für $v = 0$ einbezogen werden. Zur Erleichterung der Rechnung kann die Substitution $w = \frac{v}{10} - 2$ verwendet werden. Ermitteln Sie die Funktion $f(v)$!

Lösung:

| v_i | w_i | s_i | w_i^2 | w_i^3 | w_i^4 | $w_i s_i$ | $w_i^2 s_i$ |
|----------|-------|-------|---------|---------|---------|-----------|-------------|
| 0 | -2 | 0 | 4 | -8 | 16 | 0 | 0 |
| 10 | -1 | 3 | 1 | -1 | 1 | -3 | 3 |
| 20 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 30 | 1 | 15 | 1 | 1 | 1 | 15 | 15 |
| 40 | 2 | 25 | 4 | 8 | 16 | 50 | 100 |
| Σ | 0 | 52 | 10 | 0 | 34 | 62 | 118 |

Für die Koeffizienten des Polynoms in w ergibt sich damit das Gaußsche Normalgleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
 34\tilde{a} & +10\tilde{c} & = 118 & | + \\
 10\tilde{b} & & = 62 & \implies \tilde{b} = \frac{31}{5} \\
 10\tilde{a} & + 5\tilde{c} & = 52 & | \cdot 2 \\
 20\tilde{a} & +10\tilde{c} & = 104 & | - \\
 14\tilde{a} & & = 14 & \implies \tilde{a} = 1, \tilde{c} = \frac{52-10}{5} = \frac{42}{5}
 \end{array}$$

$$w^2 + \frac{31}{5}w + \frac{42}{5} = \left(\frac{v}{10} - 2\right)^2 + \frac{31}{5}\left(\frac{v}{10} - 2\right) + \frac{42}{5} = \frac{v^2}{100} - \frac{2}{5}v + 4 + \frac{31}{50}v - \frac{62}{5} + \frac{42}{5} = \frac{v^2}{100} + \frac{31-20}{50}v$$

$$\underline{\underline{f(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{11}{50}v}}$$