Aufgabe 18.130

Eine Fondsanalyse zeigt folgende Wertentwicklung:

Jahr	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Wert	100	110	140	170	185	296	225	205	143

Approximieren Sie die Wertentwicklung mit der Methode der kleinsten Quadrate durch Polynome 1. bis 5. Grades, stellen Sie das Ergebnis tabellarisch und grafisch dar!

Lösung:

Es müssen Größen x_i, x_i^2, ... berechnet werden, deshalb ist es zweckmäßig, für die Zeitkoordinate $x_i = 1, \ldots, 9$, noch besser aber $x_i = -4, \ldots, 4$ zu verwenden.

t_i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_i^5	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1995	−4	16	−64	256	−1024	100	−400	1600
1996	−3	9	−27	81	−243	110	−330	990
1997	−2	4	−8	16	−32	140	−280	560
1998	−1	1	−1	1	−1	170	−170	170
1999	0	0	0	0	0	185	0	0
2000	1	1	1	1	1	296	296	296
2001	2	4	8	16	32	225	450	900
2002	3	9	27	81	243	205	615	1845
2003	4	16	64	256	1024	143	572	2288
$\sum$	0	60	0	708	0	1574	753	8649

Lineare Approximation: Approximation durch Gerade $P_1(x) = a_1 x + a_0$

Gaußsches Normalgleichungssystem: $\boxed{\begin{array}{l} \sum x_i^2\, a_1 + \sum x_i\, a_0 = \sum x_i y_i \\ \sum x_i\, a_1 + \ n \ \ a_0 = \ \sum y_i \end{array}}$

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 140 \\ 170 \\ 185 \\ 296 \\ 225 \\ 205 \\ 143 \end{pmatrix}$$

Mit $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und Nummerierung der Komponenten von $\vec{a}$ in absteigender Folge von 1 bis 0 hat dieses System die Form $\boxed{\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\vec{a} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\vec{y}}$.

Konkret lautet das System $\begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 753 \\ 1574 \end{pmatrix}$, es hat die Lösung $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{753}{60} \\ \frac{1574}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{251}{20} \\ \frac{1574}{9} \end{pmatrix}$,

so dass $P_1(x) = \dfrac{251}{20}x + \dfrac{1574}{9} \approx 12{,}55x + 174{,}89$ die gesuchte lineare Approximation ist, die allerdings wenig mit der tatsächlichen Wertentwicklung gemein hat.

Quadratische Approximation: Approximation durch Parabel $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Gaußsches Normalgleichungssystem: $\boxed{\begin{array}{l}\sum x_i^4\, a_2+\sum x_i^3\, a_1+\sum x_i^2\, a_0=\sum x_i^2 y_i\\ \sum x_i^3\, a_2+\sum x_i^2\, a_1+\sum x_i\ a_0=\sum x_i\, y_i\\ \sum x_i^2\, a_2+\sum x_i\ a_1+\ \ n\ \ a_0=\ \sum y_i\end{array}}$

$$\begin{pmatrix}16&9&4&1&0&1&4&9&16\\-4&-3&-2&-1&0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16&-4&1\\9&-3&1\\4&-2&1\\1&-1&1\\0&0&1\\1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\\16&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&9&4&1&0&1&4&9&16\\-4&-3&-2&-1&0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\110\\140\\170\\185\\296\\225\\205\\143\end{pmatrix}$$

Mit $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}16&9&4&1&0&1&4&9&16\\-4&-3&-2&-1&0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$ und Nummerierung der Komponenten von $\vec{a}$ in absteigender Folge von 2 bis 0 hat dieses System die Form $\boxed{\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{a}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}}$.

Konkret lautet das System $\begin{pmatrix}708&0&60\\0&60&0\\60&0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\a_1\\a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8649\\753\\1574\end{pmatrix}$, es hat die Lösung $\begin{pmatrix}a_2\\a_1\\a_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{503}{84}\\\frac{251}{20}\\\frac{4511}{21}\end{pmatrix}$,

so dass $P_2(x)=-\dfrac{503}{84}x^2+\dfrac{251}{20}x+\dfrac{4511}{21}\approx-5{,}99x^2+12{,}55x+214{,}81$ die gesuchte quadratische Approximation ist.

Kubische Approximation: Approximation durch $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

Die Lösung des Normalgleichungssystems $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{a}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}$ für $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}-64&-27&-8&-1&0&1&8&27&64\\16&9&4&1&0&1&4&9&16\\-4&-3&-2&-1&0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$

führt auf $P_3(x)=-\dfrac{1151}{594}x^3-\dfrac{503}{84}x^2+\dfrac{42073}{1188}x+\dfrac{4511}{21}$.

Approximation durch Polynom 4. Grades $P_4(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

Die Lösung des Normalgleichungssyst. $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{a}=\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}$ für $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}256&81&16&1&0&1&16&81&256\\-64&-27&-8&-1&0&1&8&27&64\\16&9&4&1&0&1&4&9&16\\-4&-3&-2&-1&0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$

führt auf $P_4(x)=\dfrac{37}{429}x^4-\dfrac{1151}{594}x^3-\dfrac{12707}{1716}x^2+\dfrac{42073}{1188}x+\dfrac{93295}{429}$.

Approximation durch Polynom 5. Grades $P_4(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Die Lösung des Normalgl.syst. $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{a} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}$ für $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -1024 & -243 & -32 & -1 & 0 & 1 & 32 & 243 & 1024 \\ 256 & 81 & 16 & 1 & 0 & 1 & 16 & 81 & 256 \\ -64 & -27 & -8 & -1 & 0 & 1 & 8 & 27 & 64 \\ 16 & 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

führt auf $P_5(x) = \frac{601}{3120}x^5 + \frac{37}{429}x^4 - \frac{13493}{2288}x^3 - \frac{12707}{1716}x^2 + \frac{217673}{4290}x + \frac{93295}{429}$.

Jahr	x_i	y_i	$P_1(x_i)$	$P_2(x_i)$	$P_3(x_i)$	$P_4(x_i)$	$P_5(x_i)$
1995	-4	**100**	124,69	68,80	101,35	103,42	98,29
1996	-3	**110**	137,24	123,27	106,99	103,88	118,01
1997	-2	**140**	149,79	165,76	135,53	133,90	128,77
1998	-1	**170**	162,34	196,27	175,34	176,67	165,12
1999	0	**185**	174,89	214,81	214,81	217,47	217,47
2000	1	**296**	187,44	221,37	242,30	243,63	255,19
2001	2	**225**	199,99	215,96	246,19	244,56	249,70
2002	3	**205**	212,54	198,57	214,84	211,74	197,61
2003	4	**143**	225,09	169,20	136,65	138,72	143,85