Aufgabe 18.129

Die Gewinnentwicklung eines Unternehmens in den Jahren 2000 bis 2004 zeigt folgende Ergebnisse:

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004
Gewinn (in Mill. €)	50	51	52	54	58

Es soll ermittelt werden, mit welchen Gewinnen 2005, 2006 und 2007 zu rechnen war, wenn unveränderte wirtschaftliche Rahmenbedingungen unterstellt werden.

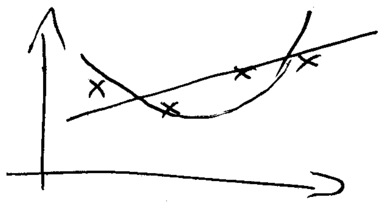
a) Nutzen Sie hierfür die Methode der kleinsten Quadrate mit einem linearen Ansatz!
b) Nutzen Sie hierfür die Methode der kleinsten Quadrate mit einem quadratischen Ansatz!
c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von a) und b) und nehmen Sie eine kritische Wertung vor!

(nach Übungsmaterial zu Vorlesungen von Prof. Luderer)

Lösung:

Approximation: geg. Punkte (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, k$

Approximation z.B. durch
$y(x) = mx + n$ linearer Ansatz, Gerade,
$y(x) = ax^2 + bx + c$ quadratischer Ansatz, Parabel



Methode der kleinsten Quadrate: $\sum\limits_{i=1}^{k} (y(x_i) - y_i)^2 \longrightarrow \min$

a) lineare Approximation: $F(m,n) = \sum\limits_{i=1}^{k} (mx_i + n - y_i)^2 \longrightarrow \min$

$$\frac{\partial F}{\partial m} = \sum_{i=1}^{k} 2\,(mx_i + n - y_i)\,x_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{k} (mx_i^2 + nx_i - x_i y_i) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \sum_{i=1}^{k} 2\,(mx_i + n - y_i) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{k} (mx_i + n - y_i) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum x_i^2\, m + \sum x_i\, n = \sum x_i y_i \\ \sum x_i\, m + k\, n = \sum y_i \end{array}}$$

„(Gaußsches) Normalgleichungssystem“

Da Größen wie $\sum x_i$, $\sum x_i^2$ berechnet werden müssen, bietet sich zur Rechenvereinfachung die Substitution $x_i = t_i - 2002$, t_i Jahreszahl, an.

t_i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
2000	-2	50	4	-100
2001	-1	51	1	-51
2002	0	52	0	0
2003	1	54	1	54
2004	2	58	4	116
$\sum$	0	265	10	19

$$\begin{aligned} 10m &= 19 \ \rightarrow\ m = 1.9 \\ 5n &= 265 \ \rightarrow\ n = 53 \end{aligned}$$

$y(x) = 1.9\,x + 53$

$\tilde{y}(t) = 1.9\,(t - 2002) + 53$

b) quadratische Approximation: $F(a,b,c) = \sum\limits_{i=1}^{k} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 \longrightarrow \min$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{k} 2\left(ax_i^2 + bx_i + c\right)x_i^2 = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{k} 2\left(ax_i^2 + bx_i + c\right)x_i = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial c} = \sum_{i=1}^{k} 2\left(ax_i^2 + bx_i + c\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum x_i^4\, a + \sum x_i^3\, b + \sum x_i^2\, c = \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3\, a + \sum x_i^2\, b + \sum x_i\, c = \sum x_i\, y_i \\ \sum x_i^2\, a + \sum x_i\, b + \quad k \quad c = \ \sum y_i \end{array}}$$

„Normalgleichungssystem“

Ergänzung der Tabelle aus a):

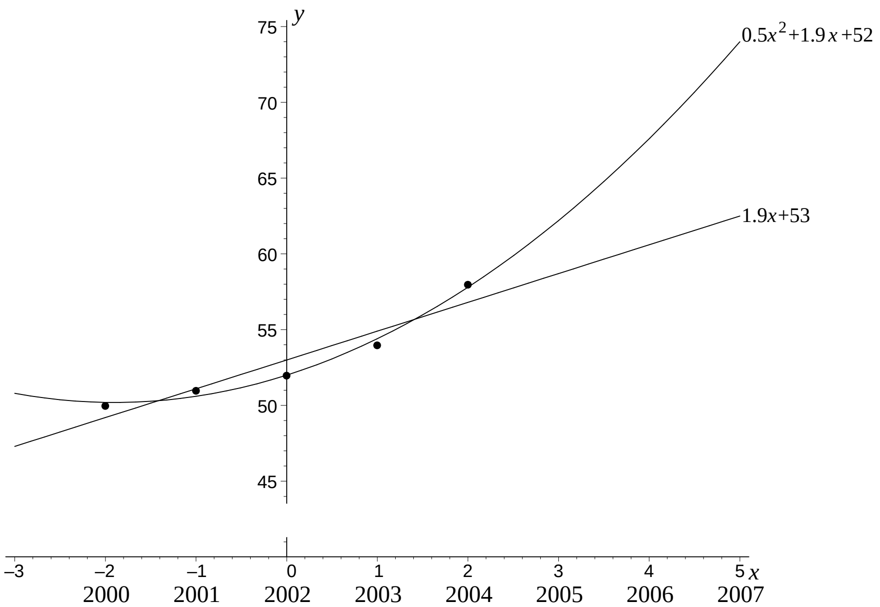
t_i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	x_i^3	x_i^4	$x_i^2y_i$
2000	−2	50	4	−100	−8	16	200
2001	−1	51	1	−51	−1	1	51
2002	0	52	0	0	0	0	0
2003	1	54	1	54	1	1	54
2004	2	58	4	116	8	16	232
$\sum$	0	265	10	19	0	34	537

$$\begin{array}{llcll} 34a & +10c & = & 537 & \\ \quad 10b & & = & 19 & \rightarrow \quad b = 1.9 \\ 10a & +\ 5c & = & 265 & \\ 20a & +10c & = & 530 & \\ 14a & & = & 7 & \rightarrow \quad a = 0.5 \end{array}$$
$$\rightarrow \quad c = \frac{1}{5}(265 - 5) = 52$$

$$y(x) = 0.5x^2 + 1.9x + 52$$

c)

t_i	x_i	y_i	Gerade	Parabel
2000	−2	50	49.2	50.2
2001	−1	51	51.1	50.6
2002	0	52	53	52
2003	1	54	54.9	54.4
2004	2	58	56.8	57.8
2005	3		58.7	62.2
2006	4		60.6	67.6
2007	5		62.5	74



Der quadratische Ansatz ist optimistischer als der lineare Ansatz. Er approximiert die gegebenen Werte besser, unterstellt aber, dass das starke Wachstum anhält. Die Annahme eines fortdauernden quadratischen Anstiegs ist sicher problematisch.