Aufgabe 18.127

Gegeben sei die Kurve $x^2+y^2+(x+y)^2=2$.

a) Zeigen Sie, dass kein Punkt der Kurve außerhalb des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Koordinatenursprung liegt!

b) Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multipikatoren die Punkte der Kurve, die den kleinsten bzw. größten Abstand vom Koordinatenursprung haben!
Hinweis: Es ist zweckmäßig, das Quadrat des Abstands zu minimieren bzw. maximieren!

c) Klassifizieren und skizzieren Sie die Kurve auf Grund des Ergebnisses von b)! Geben Sie außerdem ihre Gleichung in Hauptachsenlage an!

Lösung:

a) Für Punkte außerhalb des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Koordinatenursprung gilt $x^2+y^2>\sqrt{2}^2=2$. Wegen $(x+y)^2\geq 0$ kann dann nicht $x^2+y^2+(x+y)^2=2$ gelten, so dass sie nicht auf der durch die Gleichung beschriebenen Kurve liegen können.

b) $f(x,y)=x^2+y^2 \longrightarrow$ extr. unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+(x+y)^2=2$

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2+(x+y)^2-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x=2x+2\lambda x+2\lambda(x+y)=0 \\ L_y=2y+2\lambda y+2\lambda(x+y)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2(1+\lambda)x=2(1+\lambda)y \quad \swarrow\searrow \quad \lambda=-1 \quad x=y$$

$$L_\lambda=x^2+y^2+(x+y)^2-2=0$$

Fall $\lambda=-1$: $L_x=L_y=2\lambda(x+y)=0 \Longrightarrow x+y=0,\ y=-x$

$L_\lambda=0 \Longrightarrow x^2+x^2-2=0,\ x^2=1,\ x=\pm 1$

Stationäre Punkte sind also $(1,-1,-1)$ und $(-1,1,-1)$.

Fall $x=y$: $L_x=L_y=2x+2\lambda x+4\lambda x=2x(1+3\lambda)=0$

$x=y=0$ kann nicht sein, da dann $L_\lambda=-2\neq 0$ wäre, also folgt $\lambda=-\dfrac{1}{3}$.

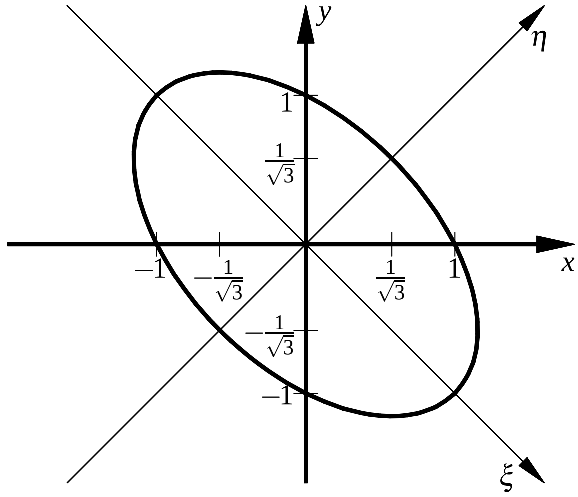
$L_\lambda=0 \Longrightarrow x^2+x^2+4x^2-2=0,\ 6x^2=2,\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Stationäre Punkte sind also $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{3}\right)$ und $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{3}\right)$.

Da die Kurve in einem beschränkten Gebiet liegt, muss es Punkte mit kleinstem und größtem Abstand vom Koordinatenursprung geben. Es gibt nur 4 extremwertverdächtige Punkte. Offenbar haben $(\pm 1,\mp 1)$ bzw. $(\pm 1/\sqrt{3},\pm 1/\sqrt{3})$ jeweils gleichen Abstand vom Koordinatenursprung, wobei die zuerst genannten Punkte weiter vom Koordinatenursprung entfernt sind.

Also wird der kleinste Abstand $\left(\sqrt{2/3}\right)$ in den Punkten $(\pm 1/\sqrt{3},\pm 1/\sqrt{3})$ und der größte Abstand $\left(\sqrt{2}\right)$ in den Punkten $(\pm 1,\mp 1)$ angenommen.

c) Da die 4 gerade ermittelten Punkte offensichtlich nicht auf einer Gerade liegen, beschreibt die quadratische Form eine Kurve 2. Ordnung, also eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel. Hyperbel und Parabel würden sich ins Unendliche erstrecken, also handelt es sich um eine Ellipse.



Da die quadratische Form keine linearen Terme enthält, ist Mittelpunkt der Ellipse der Koordinatenursprung. Die ermittelten Punkte sind dann die Schnittpunkte der Ellipse mit ihren Hauptachsen. Die Halbachsenlängen sind damit $\sqrt{2}$ und $\sqrt{2/3}$, so dass die Gleichung in Halbachsenlage $\dfrac{\xi^2}{2} + \dfrac{\eta^2}{2/3} = 1$ lautet.