Aufgabe 18.126

Auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ ist der Punkt gesucht, der vom Punkt $(0,2)$ den geringsten Abstand hat!

Lösung:

Abstand von $(0,2)$: $\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$

Das Minimum des Abstands wird im gleichen Punkt angenommen wie das Minimum des Abstandsquadrats. Deshalb lösen wir der Einfachheit halber die Aufgabe

$f(x,y) = x^2 + (y-2)^2 \longrightarrow \min$
NB: $x^2 - y^2 - 4 = 0$

$F(x,y,\lambda) = x^2 + (y-2)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 4)$

$$\begin{array}{llcll}
F_x & = 2x + 2\lambda x & = 0 & \Rightarrow \; x(1+\lambda) = 0 & \text{(I)} \\
F_y & = 2(y-2) - 2\lambda y & = 0 & \Rightarrow \; y(1-\lambda) = 2 & \text{(II)} \\
F_\lambda & = x^2 - y^2 - 4 & = 0 & & \text{(III)}
\end{array}$$

(I) $\Longrightarrow$ $x = 0$, dann würde aus (III) $-y^2 - 4 = 0$ folgen, was nicht sein kann,
oder $\lambda = -1$, dann folgt aus (II) $y = 1$ und aus (III) schließlich $x = \pm\sqrt{5}$.

Da der Abstand nach unten beschränkt ist (nicht kleiner als 0 werden kann), muss es ein Minmum geben. Es kann nur in den Punkten $(\sqrt{5},1)$ und $(-\sqrt{5},1)$ angenommen werden. Wegen $f(\sqrt{5},1) = f(-\sqrt{5},1) = 6$ haben diese beiden Punkte mit $\sqrt{6}$ den geringsten Abstand zu der Hyperbel.

oder:

$\tilde{f}(y) = y^2 + 4 + (y-2)^2$, $\tilde{f}'(y) = 2y + 2(y-2) = 4y - 4 = 0$ für $y = 1$, $\tilde{f}''(y) = 4 > 0$.

Somit wird das Minimum für $y = 1$ angenommen. $x = \pm\sqrt{y^2+4} = \pm\sqrt{5}$. Also haben die Punkte $(\sqrt{5},1)$ und $(-\sqrt{5},1)$ den geringsten Absand zu der Hyperbel.