Aufgabe 18.125

Ermitteln Sie auf der Kreislinie $x^2+y^2=25$ diejenigen Punkte, deren Abstand vom Punkt $(2,4)$ maximal bzw. minimal ist!

Lösung:

Um die Rechnung zu vereinfachen, werden Extremwerte des Quadrates des Abstandes gesucht. Diese werden offenbar an den gleichen Stellen angenommen wie die des Abstandes.

Gesucht werden also Extrema von $f(x,y)=(x-2)^2+(y-4)^2$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=25$.

$L(x,y,\lambda)=(x-2)^2+(y-4)^2+\lambda(x^2+y^2-25)$

$$L_x=2(x-2)+2\lambda x=0 \qquad x-2+\lambda x=0 \qquad x(1+\lambda)=2 \qquad x=\frac{2}{1+\lambda}$$

$$L_y=2(y-4)+2\lambda y=0 \qquad y-4+\lambda y=0 \qquad y(1+\lambda)=4 \qquad y=\frac{4}{1+\lambda}$$

$$L_\lambda=x^2+y^2-25 \quad =0 \qquad \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{4}{1+\lambda}\right)^2=25 \qquad \frac{2^2+4^2}{25}=(1+\lambda)^2 \qquad 1+\lambda=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\lambda=-1\pm\frac{2}{\sqrt{5}},\ x=\frac{2}{1+\lambda}=\pm\sqrt{5},\ y=\frac{4}{1+\lambda}=\pm2\sqrt{5}$$

Stationär sind also die Punkte $(x,y,\lambda)=\left(\sqrt{5},2\sqrt{5},-1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ und $\left(-\sqrt{5},-2\sqrt{5},-1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Da anschaulich klar ist, dass es auf dem Kreis sowohl einen Punkt mit maximalem als auch einen mit minimalem Abstand von $(2,4)$ geben muss, und es nur zwei extremwertverdächtige Punkte gibt, handelt es sich bei diesen um die Extrema.

Es gilt $f(\sqrt{5},2\sqrt{5})=(\sqrt{5}-2)^2+(2\sqrt{5}-4)^2\approx 0.27864\approx 0.52786^2$ und
$f(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})=(-\sqrt{5}-2)^2+(-2\sqrt{5}-4)^2\approx 89.72136\approx 9.47214^2$.

Damit liegt der minimale Abstand 0.52786 in $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ und der maximale Abstand 9.46214 in $(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$ vor.

Die Aufgabe könnte auch wie Aufgabe 7.33 durch Ermittlung der Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit der Gerade durch den Koordinatenursprung als Kreismittelpunkt und den Punkt $(2,4)$, also der Gerade $y=2x$ gelöst werden. Einsetzen der Geradengleichung in die Kreisgleichung ergibt $5x^2=25,\ x^2=5$ und damit sofort $x=\pm\sqrt{5}$.